

Aplicaciones Económicas y Financieras de Matemática Superior.

Alicia Bernardello y Javier García Fronti.

26 de abril de 2010

Índice general

1. Conjuntos convexos y funciones C^2 aplicados en el problema del consumidor de la teoría microeconómica.	4
2. Teoría de selección de la cartera de valores.	18
3. Programación no lineal: Metodología para la búsqueda de candidatos a óptimo según Kuhn-Tucker.	37
4. Optimización dinámica: modelo de recursos no renovables con contaminación ambiental.	49
5. Modelo de Dornbusch.	62
6. Modelo IS-LM: una versión dinámica en tiempo continuo.	80
7. Programación Dinámica.	97

Prólogo.

Los cursos universitarios presentan el desafío de realizar una integración entre el dictado de contenidos específicos, el motivar un espíritu argumentativo de investigación y la formación de ciertas habilidades prácticas profesionales. Para poder enfrentar el desafío, consideramos que lo primero es contar en nuestras cátedras con un grupo humano cuya identidad sea la de docente-investigador y que se forme en forma continua.

En particular, en nuestras cátedras de Matemática para Economistas de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires, contamos con un plan de formación de ayudantes donde se incluye una capacitación pedagógica articulada con aplicaciones y con investigación en cátedra. Esta formación permite que nuestros docentes-investigadores presenten una propuesta didáctica a los alumnos que articula los conocimientos aprendidos con aplicaciones económico-actuariales y transformar la interacción en un trabajo colaborativo grupal.

Este trabajo presenta algunos trabajos de nuestros docentes que fueron y serán utilizados dentro de nuestras experiencias integradoras en los cursos de Matemática para Economistas.

Por último, queremos destacar y agradecer el trabajo de todos los colaboradores de las cátedras, pero en particular mencionar a Agustina Ruston por colaborar en las comunicaciones y a Pablo Herrera por editar en LaTeX todo el contenido del presente libro.

Alicia Bernardello¹; Javier García Fronti².

¹Profesora titular de Matemática para Economistas. Subdirectora del Departamento Pedagógico de Matemática. Secretaria Técnica e investigadora del Centro de investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión en la Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

²Profesor titular de Matemática para Economistas. Subdirector del Centro de investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires. Director del Proyecto UBACyT E012.

Capítulo 1

Conjuntos convexos y funciones C^2 aplicados en el problema del consumidor de la teoría microeconómica.

Pablo Herrera.¹

¹Se agradece a Alicia Bernaredello, Alejandra Zaia y a Julián Aramburu por la crítica constructiva realizada hacia el presente capítulo.

Introducción.

La idea principal de este trabajo es poder facilitar la comprensión del lector sobre uno de los temas de matemática para economistas; algunos conceptos topológicos. Para lograrlo, se hace hincapié en los conjuntos convexos, ya que por su recurrente aplicabilidad facilitará el desarrollo del trabajo. También se incluyen las definiciones de funciones cóncavas y convexas, para poder destacar la importancia y utilidad práctica de las funciones C^2 .

Para ver la aplicabilidad de los conjuntos convexos en la economía, nos enfocamos en el problema de la elección de los consumidores desde la perspectiva microeconómica². A partir de esto surge un objetivo secundario de este trabajo que es el de motivar al lector a la introducción de la microeconomía.

El capítulo se divide en tres secciones. La primera es la referida a los conjuntos convexos y la misma comienza enunciando definiciones formales e intuitivas de estos conjuntos y de otros elementos que facilitan la comprensión del tema. A partir de las definiciones, surgen una serie de propiedades que son aplicables sobre los conjuntos convexos y que son de suma utilidad. Al final de la sección se exponen dos ejemplos de aplicabilidad de los conjuntos convexos en el problema de elección del consumidor.

La segunda sección consiste en poder mostrar la utilidad práctica de las funciones C^2 , que son las funciones derivables y continuas dos veces. Para esto comenzamos dando las definiciones formales e intuitivas de lo que son las funciones cóncavas y convexas, anunciando a continuación un teorema que utiliza a las funciones C^2 para determinar si la función en cuestión es cóncava o convexa. En esta sección es necesario tener en claro algunos conceptos matemáticos previos, en particular cuándo una matriz es definida ó semidefinida negativa ó positivamente.

Esperando que sirva de motivación, además de facilitar la comprensión, al final del capítulo, en la sección tres, se hace una muy breve introducción sobre algunos de los supuestos que se hacen sobre las preferencias de los consumidores y las implicancias gráficas de los mismos.

²Los conceptos en los que se basa este capítulo, y los necesarios para la comprensión del mismo, se pueden consultar en el libro "Teoría microeconómica" de Andreu Mas-Colell, Michael Whinston y Jerry Green.

Conjuntos convexos.

En esta sección comenzamos dando las definiciones formales de conjunto convexo, combinaciones convexas y puntos extremos para finalmente poder enunciar un importante teorema. A continuación damos ejemplos de la aparición de estos conceptos topológicos en el problema del consumidor de la teoría microeconómica.

Definiciones formales.

Definición 1.1: El conjunto $A \subset R^n$ es convexo si $\alpha x + (1 - \alpha)x' \in A$ para todo $x, x' \in A$ y $\alpha \in [0, 1]$.

En palabras: El conjunto A en R^n es convexo si para todo par de puntos, x y x' de A , el segmento que los une tiene todos sus puntos pertenecientes al mismo conjunto A .

A partir de la definición se puede deducir la siguiente propiedad. La intersección de cualquier número de conjuntos convexos es convexa, pero la unión de conjuntos convexos, no es necesariamente convexa.

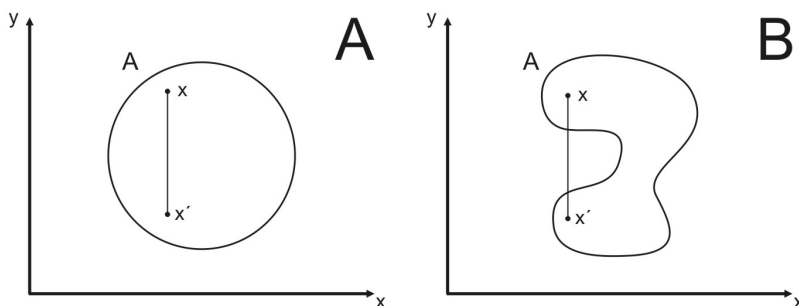


Figura 1.1: La parte A de la figura representa un conjunto convexo, ya que el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto, queda contenido en el mismo conjunto. La parte B de la figura representa un conjunto no convexo.

Definición 1.2: Dado el conjunto $A \subset R^n$, el conjunto de todas las posibles combinaciones convexas de A es,

$$CoA = \left\{ \sum_{j=1}^J \alpha_j x_j \mid \forall x_1, \dots, x_J \in A \wedge \forall \alpha_1, \dots, \alpha_J \in [0, 1] \wedge \sum_{j=1}^J \alpha_j = 1 \right\}$$

Definición 1.3: El vector $x \in A$ es un punto extremo del conjunto convexo $A \subset R^n$ si no puede ser expresado como $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ para cualquier $y, z \in A$ y $\alpha \in (0, 1)$.

A partir de las definiciones anteriores podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 1. *Supongamos que A en R^n es un conjunto convexo y que además es compacto (cerrado y acotado). Entonces todo $x \in A$ puede ser expresado como una combinación convexa de a lo sumo $n + 1$ puntos extremos de A .*

Ejemplos.

Ejemplo 1.1: En la teoría microeconómica se modela el comportamiento del consumidor para ver de que manera elige una canasta de consumo tratando de maximizar su utilidad. El conjunto de consumo de este individuo está compuesto por todas aquellas canastas que puede consumir dada la restricción física de que las cantidades no pueden ser negativas.

$$X = \{x \in R^L : x \geq 0_v\}$$

Se puede notar que este conjunto está representado por el primer cuadrante en un gráfico de dos dimensiones y el mismo es convexo.

La explicación es sencilla. Por tratarse de un conjunto representado en un plano, las canastas entre las que puede elegir nuestro consumidor modelo cuenta solamente con dos bienes, representados uno en el eje de las ordenadas y otro en el de las abscisas. Supongamos que la elección es entre dos canastas, x e y , y los elementos que las componen son x_1 y x_2 para la primera canasta e y_1 e y_2 para la segunda. Dada que la restricción física de que las cantidades no pueden ser negativas podemos ver que las canastas x e y son representadas en el primer cuadrante mediante un punto. A continuación realizamos una combinación convexa entre los puntos que representan a cada una de las canastas, y podemos notar que el segmento que representa esa combinación está compuesto por infinitas canastas (una por cada punto que forma parte del segmento). Esas mismas canastas están compuestas por diferentes cantidades de los dos mismos bienes que las canastas x e y , además de respetar la restricción física por no tratarse de cantidades negativas. Por lo tanto, también forman parte del primer cuadrante, o sea del conjunto de consumo. Finalmente, podemos concluir que el mismo es un conjunto convexo, ya que la combinación lineal entre cualquiera de sus puntos, también forma parte del mismo conjunto.

Ejemplo 1.2: Para comenzar con este ejemplo es necesario definir previamente (de manera informal) dos tipos de conjuntos.

Definición: Dada una relación de preferencias, \succ_d^3 , y dada una canasta de consumo, x , se define el conjunto de **contorno superior**, X , como aquel conformado por todos los elementos y que son al menos tan buenos como x .

$$\{y \in X : y \succ_d x\}$$

Definición: Dada una relación de preferencias, \succ_d , y dada una canasta de consumo, x , se define el conjunto de contorno inferior, X , como aquel conformado por todos los elementos y caracterizados por el hecho de que x es al menos tan bueno como ellos.

$$\{y \in X : x \succ_d y\}$$

Además es necesario aclarar que las curvas de indiferencia representan una serie de canastas ante las cuales el consumidor se mantiene indiferente. Las preferencias del consumidor aumentan alejándose del origen en sentido noreste, y por lo tanto las infinitas canastas que se encuentran sobre una curva de indiferencia más alejada del origen son preferidas.

Si consideramos el conjunto de contorno superior de las preferencias del tipo Cobb-Douglas,

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$$

o del tipo Leontieff,

$$U(x_1, x_2) = \text{Min} \{x_1, x_2\}$$

podemos notar que en ambos casos se trata de conjuntos convexos. Es decir, si tomamos dos canastas que se encuentren en cualquiera de las infinitas curvas de indiferencia más alejadas del origen que la primera, y trazamos un segmento que una esas dos canastas, ese mismo segmento estará compuesto por infinitos puntos que representarán cada uno diferentes canastas que se encuentran sobre curvas de indiferencia más alejadas del origen que la primera y por lo tanto pertenecen también al conjunto de contorno superior.

³ \succ_d denota una relación de preferencia débil, mientras que \succ denota una relación de preferencia fuerte.

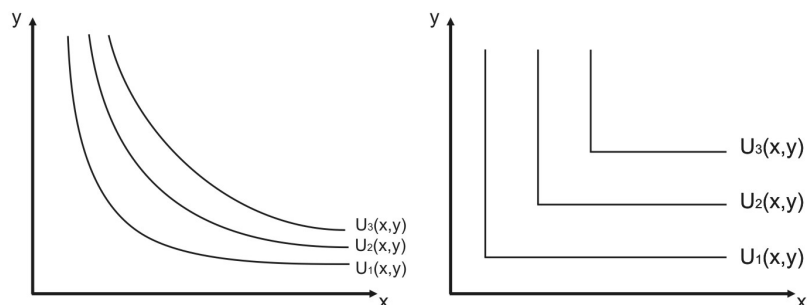


Figura 1.2: En la parte A de la figura vemos representada las preferencias del tipo Cobb-Douglas. En la parte B de la figura vemos representada las preferencias del tipo Leontief.

En cambio, si las preferencias están representadas por

$$U(x_1, x_2) = \text{Max} \{x_1, x_2\}$$

el conjunto de contorno inferior sería en este caso el conjunto convexo. Para notarlo realizamos el mismo análisis que en el caso anterior, y notamos que las infinitas canastas contenidas en la combinación convexa se encuentran en curvas de indiferencia más cercanas al origen que la primera, y por lo tanto las canastas en cuestión pertenecen al conjunto de contorno inferior, concluyendo que el mismo es convexo.

Para comprender mejor el análisis realizado sobre las preferencias de los consumidores, en la figura 1.2 mostramos la representación gráfica de la utilidad del consumidor representada por $U(x_1, x_2) = x^2 + y^2$, y cómo a partir de esto se llega a la representación gráfica de las curvas de indiferencia (cóncavas) del mismo.

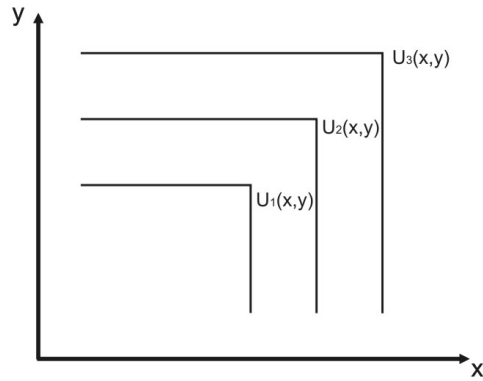


Figura 1.3: Representación gráfica de las preferencias del tipo max.

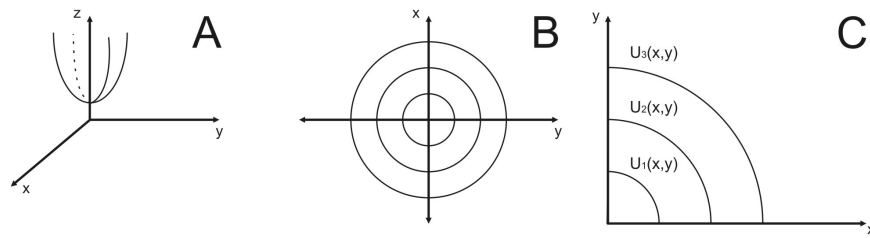


Figura 1.4: La parte A de la figura representa la función de utilidad en un plano de tres dimensiones. En la parte B, inclinando el eje de la Z hacia adelante, podemos ver la representación de la función de utilidad en un plano. Por último, en la parte C podemos ver, mediante la rotación de los ejes, el primer cuadrante donde graficamos habitualmente la función de utilidad.

Funciones cóncavas y convexas y la utilidad de las funciones C^2 .

En esta sección comenzamos dando las definiciones formales de funciones cóncavas y convexas para poder a continuación, haciendo mención de las funciones C^2 y de su utilidad, poder reconocer cuál de las dos características definidas posee la función.

Definiciones formales.

Definición 1.4: La función $f : A \rightarrow R$, definida en el conjunto convexo $A \subset R^n$, es cóncava si

$$f(\alpha x' + (1 - \alpha)x) \geq \alpha f(x') + (1 - \alpha)f(x)$$

para todo x y $x' \in A$ y todo $\alpha \in [0, 1]$. Si la desigualdad se cumple de manera estricta para todo $x \neq x'$ y para todo $\alpha \in (0, 1)$, decimos entonces que la función es estrictamente cóncava.

Las propiedades de convexidad y estricta convexidad de una función f se definen de manera análoga pero con las desigualdades invertidas.

En palabras: Para una función de una variable, la estricta concavidad de la misma, indica que una línea recta que una dos puntos cualesquiera pertenecientes a la gráfica de f , queda por debajo de esta gráfica. En el caso de la concavidad no estricta, la línea recta puede ser parte de la misma gráfica de la función f . En el caso de las funciones que son estrictamente convexas, la línea recta que une a dos puntos de la gráfica de la función queda por encima de la misma gráfica, mientras que si la función es no estrictamente convexa, la línea recta puede ser parte de la misma gráfica de la función.

La utilidad de las funciones C^2 .

Teorema 2. *La (dos veces continua y diferenciable) función $f : A \rightarrow R$ es cóncava si y sólo si $D^2f(x)$ es semidefinida negativa para todo $x \in A$. Si*

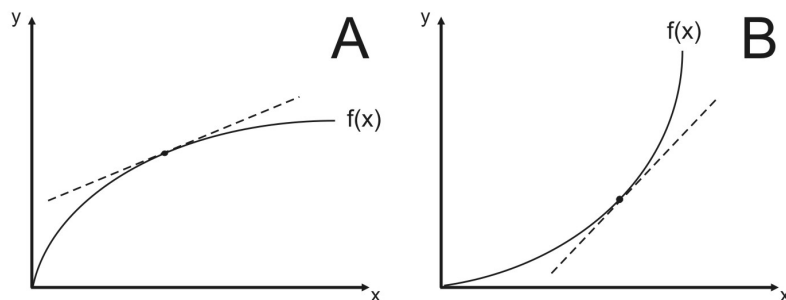


Figura 1.5: En la parte A de la figura vemos representas una función estrictamente convexa y en la parte B de la figura una función estrictamente cóncava.

$D^2f(x)$ es definida negativa, entonces la función es estrictamente cóncava.

Si consideramos el caso especial cuando $n = 1$ (es decir, f depende de una sola variable), que la matriz $D^2f(x)$ sea semidefinida negativa va a depender de que $d^2f(x)/dx^2 \leq 0$, mientras para que sea definida negativa será necesario que $d^2f(x)/dx^2 < 0$. El Teorema 2 nos dice que en este caso f es cóncava si y sólo si $d^2f(x)/dx^2 \leq 0$ para todo x , y que si $d^2f(x)/dx^2 < 0$, entonces f es estrictamente cóncava. Sin embargo, el teorema no asevera que si f es estrictamente cóncava entonces se defina como negativa la matriz $D^2f(x)$. Considérese por ejemplo, cuando $n = 1$, la función $f(x) = -x^4$ es estrictamente cóncava, pero $d^2f(x)/dx^2 = 0$.

El mismo teorema es válido para definir si una función es convexa ó estrictamente convexa, lo único que hace falta hacer es invertir el signo de las desigualdades.

Supuestos sobre las preferencias del consumidor.

Esta sección esta dedicada a brindar un conocimiento básico sobre la teoría microeconómica, que a la vez sirva de motivación para el lector.

A continuación se enuncian los supuestos que se hacen sobre la preferencias de un consumidor modelo, haciendo hincapié en las implicancias gráficas que tiene la inclusión de cada una de estas, siendo el objetivo poder reconocer fácilmente los elementos topológicos dentro del problema de elección de este consumidor.

Supuestos de racionalidad.

Completas: Dados dos pares cualquiera de alternativas, todo individuo tiene sus preferencias definidas respecto a las mismas. Bajo este supuesto se deja de lado la indecisión del individuo. Este supuesto permite formar el mapa de indiferencias de un individuo.

Transitivas: Si un individuo prefiere una canasta x a otra canasta y , y a su vez prefiere la canasta y a la canasta z , entonces prefiere la canasta x a la canasta z . Con este supuesto se dejan de lado las decisiones circulares. En lo que refiere al problema matemático este supuesto es el que posibilita la maximización de la utilidad del individuo, evitando que las curvas de indiferencia se crucen.

Si las preferencias son completas y transitivas, se dice que las mismas son racionales, y que lo sean es una condición necesaria para la existencia de una función de utilidad.

Supuestos de deseabilidad.

Monotonidad fuerte: Una canasta que posee más de al menos un bien que otra, es preferida a ésta última. Siempre que se de este supuesto las curvas de indiferencia serán decrecientes.

Monotonidad débil: Una canasta que posee más de todos los bienes que otra, es preferida a ésta última. Siempre que se cumpla este supuesto, las curvas de indiferencia no podrán tener pendiente positiva en ninguno de sus tramos.

Insaciabilidad local: Para cada canasta hay otra a una distancia arbitrariamente pequeña que es preferida a la primera. Este supuesto impide la existencia de curvas de indiferencia gruesas.

Supuestos de convexidad.

Convexidad estricta: La tasa marginal de sustitución es decreciente, es decir, que a medida que el individuo tenga menos de un bien estará más dispuesto a sacrificar más del otro por una unidad adicional del primero. Este supuesto hace referencia a la valoración de la escasez por parte de los individuos. A su vez implica que la función de utilidad es estrictamente cuasicóncava entonces las curvas de indiferencia son estrictamente convexas (condición necesaria y suficiente).

Convexidad: La tasa marginal de sustitución puede ser constante, es decir, el individuo esta dispuesto a dar lo mismo que recibe. Implica que la función de utilidad es cuasicóncava entonces las curvas de indiferencia son convexas (condición necesaria y suficiente).

Conclusión.

En este capítulo, a través de ejemplos de aplicabilidad práctica, se ha intentado mostrar y motivar al lector acerca de la utilización de distintos conceptos topológicos. El objetivo buscado mediante la definición de los conjuntos convexos y la explicación de la utilidad de las funciones C^2 es el de poder ayudar al lector a abordar ciertos temas que hacen utilización de estos conceptos. En el presente capítulo la aplicabilidad de estos conceptos la desarrollamos en el campo de la microeconomía, pero su aplicabilidad es de basto alcance.

Bibliografía.

- "Teoría microeconómica" de Andreu Mas-Colell, Michael Whinston y Jerry Green. Oxford University Press 1995.

Capítulo 2

Teoría de selección de la cartera de valores.

Eugenio Agopian.

Introducción.

El objetivo de este trabajo es presentar una aplicación de la optimización clásica en el ámbito financiero. El modelo a plantear es el de selección de cartera de valores, desarrollado por Harry Markowitz en dos trabajos en los años cincuenta del siglo veinte.¹

Se entiende por cartera de valores a una determinada combinación de activos financieros adquiridos por una persona física o jurídica, y que pasan por lo tanto, a formar parte de su patrimonio.

Esta teoría surge en respuesta a la problemática del inversor de no saber que proporción de su capital invertir en cada uno de los activos disponibles. Mediante el aporte de Markowitz, es posible para el inversor analizar la situación de manera tal de conseguir maximizar su rentabilidad sujeta a un determinado nivel de riesgo; o bien, minimizar el riesgo para una rentabilidad deseada. El inversor, sobre el cual Markowitz postula una serie de supuestos acerca de su comportamiento, se ve afectado por dos fuerzas de sentido opuesto, deseabilidad de ganancias, contra la aversión que le provoca el riesgo.

El presente trabajo se divide en tres secciones. La primera, es la referida a la obtención teórica de la cartera de mínimo riesgo generalizada para n activos. En la segunda, se muestra un ejercicio práctico de lo visto en la primera sección para el caso de tres activos riesgosos. En la última parte, se busca construir la frontera eficiente.

Cartera de mínimo riesgo.

El objetivo de este apartado será encontrar la composición de la cartera compuesta por n activos que tenga el menor riesgo posible. Antes de que se comience el desarrollo es necesario aclarar ciertas cuestiones sobre el riesgo.

En primer lugar, se debe conocer como se lo mide. Las más utilizadas son las medidas estadísticas de dispersión. Una de ellas, la varianza, se define como la esperanza matemática del cuadrado de los desvíos que se producen

¹ H. Markowitz, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, marzo 1952, págs. 77-91.

H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, Nueva York, 1959

entre cada valor de la variable y la media aritmética. Debido a que la varianza está expresada en términos cuadráticos, es útil calcular el desvío estandar, que es la raíz cuadrática positiva de la varianza. Así se puede tener los valores expresados en unidades monetarias, y no en unidades cuadráticas. Por lo tanto, el desvío se utilizará de aquí en más como indicador del riesgo de un activo.

$$VAR(X) = E [(X_i - E(X))^2]$$

$$\sigma(X) = +\sqrt{E [(X_i - E(X))^2]}$$

La cartera se compone de n activos riesgosos. Cada uno de ellos son variables aleatorias, con sus esperanzas, varianzas, covarianzas, correlación lineal entre ellos. El desvío estandar de la cartera será el indicador del riesgo de la misma, y es la raíz cuadrada positiva de la suma de las varianzas de los n activos que la componen y sus covarianzas, ambas medidas ponderadas por la participación de cada activo en la cartera.

Por lo tanto, se planteará un problema de minimización, en el cual la función objetivo será la varianza de la cartera. Como para pasar de la varianza al desvío estandar se aplica una transformación monótona, que es la raíz cuadrada positiva, al minimizar la varianza también estaremos minimizando el desvío, por lo tanto el riesgo. Las variables de elección serán las proporciones del capital a invertir en cada uno de los activos. Además, se plantea una restricción, que se invierta todo el capital disponible.

Veamos el planteo del problema matemáticamente.

$$Min \quad \sigma_p^2 = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_n^2 \cdot \sigma_n^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} \quad (1)$$

$$\text{Sujeto a: } \sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (2)$$

Donde

X_i : Proporción a invertir en el Activo i.

σ_i^2 : Varianza del Activo i.

$\sigma_{i,j}$: Covarianza entre el Activo i y el Activo j, siendo $i \neq j$.

σ_p^2 : Varianza del rendimiento de la cartera.

A fin de hacer la resolución más ordenada y prolija, se expresa el problema de optimización en forma matricial.

$$Min\sigma_p^2 = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^n X_i = 1$$

Para resolver esta minimización con una restricción utilizaremos la función de Lagrange.

$$L = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_n^2 \cdot \sigma_n^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^n X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} + \lambda \cdot (1 - \sum_{i=1}^n X_i) \quad (3)$$

Como se estudia en la teoría de la optimización, se deben encontrar los diferentes candidatos a óptimo. Esto se realiza a través de las condiciones de primer orden (CPO), que consisten en derivar la función (3) con respecto a cada una de las variables de las cuales depende e igualarlas a cero.

En el siguiente Sistema 1, se presentan las CPO del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X_1} = 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot X_1 + 2 \cdot \sigma_{1,2} X_2 + \dots + 2 \cdot \sigma_{1,n} \cdot X_n - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} = 2 \cdot \sigma_2^2 \cdot X_2 + 2 \cdot \sigma_{2,1} \cdot X_1 + \dots + 2 \cdot \sigma_{2,n} \cdot X_n - \lambda = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial X_n} = 2 \cdot \sigma_n^2 \cdot X_n + 2 \cdot \sigma_{n,1} \cdot X_1 + \dots + 2 \cdot \sigma_{n,n-1} \cdot X_{n-1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - X_1 - X_2 - \dots - X_n = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1 \end{cases}$$

Estas mismas CPO las podemos expresar en forma matricial en otro sistema, en el cual la primer matriz representa a la de coeficientes, a la cual se la denota A; luego se la multiplica por el vector columna de las incógnitas,

X; y se la iguala al vector columna de los términos independientes, B.

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{1,2} & \cdots & 2\sigma_{1,n} & -1 \\ 2\sigma_{2,1} & 2\sigma_2^2 & \cdots & 2\sigma_{2,n} & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n,1} & 2\sigma_{n,2} & \cdots & 2\sigma_n^2 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando la primer fila de la matriz A por el vector columna X, e igualando al valor de la primer fila del vector B se obtiene la primer ecuación del sistema 1. Si se hace lo mismo para la segunda fila, se obtiene la segunda ecuación del sistema 1; y así sucesivamente.

Se resuelve el sistema: $X=A^{-1}.B$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{1,2} & \cdots & 2\sigma_{1,n} & -1 \\ 2\sigma_{2,1} & 2\sigma_2^2 & \cdots & 2\sigma_{2,n} & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n,1} & 2\sigma_{n,2} & \cdots & 2\sigma_n^2 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De esta manera obtenemos todos los X_i , sabiendo entonces la proporción a adquirir de cada uno de los activos. Luego se reemplazan todos esos valores en la función objetivo para calcular σ_{pmin}^2 . Luego se calcula su raíz cuadrada positiva, σ_{pmin} . Así se obtiene el riesgo mínimo de la cartera.

Como resultado de esta optimización se obtiene la composición de la cartera de valores de mínimo riesgo, y el valor de ese riesgo.

Para asegurar que el punto crítico lleva a un mínimo y no a un máximo, o sea que la decisión de inversión adoptada lleva a un mínimo del riesgo, se analizan las condiciones de segundo orden. Para ello se debe construir el Hessiano orlado, en este caso con una sola restricción. Luego se analizan los menores principales. La cantidad de ellos que se debe analizar es el número de variables de la función objetivo menos el número de restricciones. Por ejemplo, si son 3 variables y una sola restricción, se deben analizar los últimos dos menores principales. Si son todos negativos, entonces hay un mínimo; si alternan los signos empezando por uno positivo, entonces hay un máximo.

Un ejemplo de la aplicación del Hessiano orlado se mostrará en la siguiente sección con el ejercicio práctico.

Ejercicio Práctico con 3 activos.

Para ejemplificar lo anteriormente expuesto se resolverá un problema de este tipo. Se estudió la cotización de las acciones de tres empresas que cotizan en la bolsa de Buenos Aires, INDUPA, IRSA y AGROMETAL, durante el período comprendido entre el 22 de septiembre de 2008 y el 21 de septiembre de 2009. A INDUPA la denotaremos con el subíndice 1, a AGROMETAL con el 2 y a IRSA con el 3. Se realizó el análisis estadístico correspondiente para obtener los datos necesarios², y se procederá a encontrar la cartera de mínimo riesgo, y cual es ese riesgo.

$$Min\sigma_p^2 = 0,3442.X_1^2 + 0,3814.X_2^2 + 0,2901.X_3^2 + 2.(-0,0116).X_1.X_2 + 2.(-0,0373).X_2.X_3 + 2.0,1883.X_1.X_3$$

$$s.a. \quad X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

Expresando el problema en forma matricial

$$Min\sigma_p^2 = [X_1 \quad X_2 \quad X_3] \cdot \begin{bmatrix} 0,3442 & -0,0116 & 0,1883 \\ -0,0116 & 0,3814 & -0,0373 \\ 0,1883 & -0,0373 & 0,2901 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$s.a. \quad X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

Con los datos ya presentados se arma el Lagrangiano

$$L = 0,3442.X_1^2 + 0,3814.X_2^2 + 0,2901.X_3^2 + 2.(-0,0116).X_1.X_2 + 2.(-0,0373).X_2.X_3 + 2.0,1883.X_1.X_3 + \lambda.(1 - X_1 - X_2 - X_3)$$

Ahora se pasa a buscar los valores de X_i y de λ que sean candidatos a

²Fuente: www.puentenet.com

óptimos.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial X_1} = 2 \cdot 0,3442 \cdot X_1 - 2 \cdot 0,0116 \cdot X_2 + 2 \cdot 0,1883 \cdot X_3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} = 2 \cdot 0,3814 \cdot X_2 - 2 \cdot 0,0116 \cdot X_1 - 2 \cdot 0,0373 \cdot X_3 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_3} = 2 \cdot 0,2901 \cdot X_3 + 2 \cdot 0,1883 \cdot X_1 - 2 \cdot 0,0373 \cdot X_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - X_1 - X_2 - X_3 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}$$

Ahora estas CPO se las expresa en forma matricial para poder resolver de esa manera. Manteniendo la nomenclatura de la sección anterior, tenemos el sistema $A \cdot X = B$.

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 0,3442 & 2 \cdot (-0,0116) & 2 \cdot 0,1883 & -1 \\ 2 \cdot (-0,0116) & 2 \cdot 0,3814 & 2 \cdot (-0,0373) & -1 \\ 2 \cdot 0,1883 & 2 \cdot (-0,0373) & 2 \cdot 0,2901 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego se debe invertir la matriz A para poder premultiplicarla en el segundo miembro.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0,3442 & 2 \cdot (-0,0116) & 2 \cdot 0,1883 & -1 \\ 2 \cdot (-0,0116) & 2 \cdot 0,3814 & 2 \cdot (-0,0373) & -1 \\ 2 \cdot 0,1883 & 2 \cdot (-0,0373) & 2 \cdot 0,2901 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se resuelve el sistema $X = A^{-1} \cdot B$.

De ahí se obtiene el siguiente punto óptimo, que representa la decisión del inversionista que lo lleva a obtener el mínimo riesgo:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1944 \\ 0,4056 \\ 0,4000 \end{bmatrix}$$

Se obtuvieron entonces las proporciones a invertir en cada una de las empresas. En INDUPA se debe invertir, según este análisis, el 19,44 % en AGROMETAL el 40,56 % y en IRSA el 40 %.

Con estos valores lo que se puede hacer es calcular el riesgo de la cartera. Para ello reemplazamos los valores obtenidos en la función objetivo del problema, que era la varianza de la cartera, σ_p^2 . Luego calculamos su raíz positiva y ese será el riesgo mínimo de la cartera, σ_p .

$$\sigma_p^2 = 0,3442 \cdot 0,1944^2 + 0,3814 \cdot 0,4056^2 + 0,2901 \cdot 0,4^2 + 2 \cdot (-0,0116) \cdot 0,1944 \cdot 0,4056 + 2 \cdot (-0,0373) \cdot 0,4056 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1883 \cdot 0,1944 \cdot 0,4$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= 0,13752 \\ \sigma_p &= 0,37084\end{aligned}$$

Por lo tanto, el mínimo riesgo posible, invirtiendo en estos tres activos, será de 0,37084.

Para asegurar que es un mínimo se analizan las condiciones de segundo orden. Se debe construir entonces una matriz cuadrada y simétrica, denominada Hessiano orlado. A continuación se muestra como construirlo de manera teórica para este caso en el cual solo tenemos una restricción.

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Donde

L_{ij} : Derivada segunda del Lagrangiano con respecto al porcentaje a invertir en el activo i primero y luego al j.

g_i : Derivada de la restricción con respecto al porcentaje a invertir en el activo i.

Con esta aclaración teórica realizada, se armará el Hessiano con los valores del ejercicio práctico correspondientes.

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,6884 & -0,0232 & 0,3766 \\ 1 & -0,0232 & 0,7628 & -0,0746 \\ 1 & 0,3766 & -0,0746 & 0,5802 \end{bmatrix}$$

Ahora falta analizar los signos de los últimos dos menores principales, ya que en este caso el problema tiene tres variables, le restamos una restricción y ese es el número de menores a analizar.

$$\left| \tilde{H}_2 \right| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0,6884 & -0,0232 \\ 1 & -0,0232 & 0,7628 \end{bmatrix} = -1,4976$$

$$\left| \tilde{H} \right| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,6884 & -0,0232 & 0,3766 \\ 1 & -0,0232 & 0,7628 & -0,0746 \\ 1 & 0,3766 & -0,0746 & 0,5802 \end{bmatrix} = -0,7016$$

Al ser ambos menores negativos se puede afirmar que en el punto crítico obtenido verdaderamente existe un mínimo.

Frontera Eficiente.

Al igual que lo hecho para el riesgo, antes de comenzar con el problema de la frontera eficiente, se presentará el concepto de rendimiento esperado de la cartera y se realizarán una serie de aclaraciones. El rendimiento esperado de la cartera, es el promedio ponderado de los rendimientos esperados de los activos individuales de la cartera. En otras palabras, es la suma de los rendimientos esperados de cada activo i , multiplicado por el porcentaje del capital invertido en cada uno. Se expresa como se ve a continuación en la ecuación (4)

$$E_p = X_1.E_1 + X_2.E_2 + \dots + X_n.E_n \quad (4)$$

Donde

E_i : Rendimiento esperado del Activo i .

E_p : Rendimiento esperado de la cartera.

X_i : Proporción a invertir en el Activo i .

Entonces, para calcular el rendimiento de la cartera se debe primero calcular el rendimiento esperado de cada activo. Éste se calcula haciendo el cociente entre la diferencia entre el precio esperado del activo al momento t y su precio actual, dividido el precio actual. Se expresa como se ve a continuación

$$E_i = \frac{E(P_i) - P_i}{P_i}$$

Donde

$E(P_i)$: Precio esperado del Activo i .

P_i : Precio actual del Activo i .

Finalmente, queda definir como se calcula el precio esperado del activo. Se considera entonces al precio como una variable aleatoria. El valor esperado, será entonces, la esperanza matemática de la variable aleatoria. Se puede

definir a la esperanza como la suma del producto de cada valor numérico de la función (en este caso los distintos precios posibles) por la correspondiente probabilidad de que se de ese estado. Se expresa como se ve en la siguiente ecuación

$$E(P_i) = \sum_{s=1}^N p_s \cdot P_{si}$$

Donde

- P_{si} : Estado s del precio del activo i.
- p_s : Probabilidad puntual del estado s.
- N: Número total de posibles estados.

Así queda definido y es posible calcular el rendimiento de una cartera. Cabe remarcar que como en la definición de riesgo se utiliza una medida estadística de dispersión como lo es el desvío, en el caso del rendimiento lo que se utiliza es una medida de posición, como lo es la esperanza matemática.

Luego de esta breve introducción acerca del rendimiento se planteará el problema correspondiente a este apartado. Como punto de partida se tomarán los resultados obtenidos en el apartado 1. Cuando resolvimos el problema de encontrar la cartera de mínimo riesgo de n activos, se obtenían los porcentajes a invertir en cada uno de los activos, X_i . Luego, se los reemplazaban en la función objetivo, se calculaba su raíz cuadrada positiva y se obtenía el riesgo mínimo de la cartera. Ahora lo que se plantea realizar, es el reemplazo de dichos porcentajes en la función del rendimiento promedio de la cartera, E_p , obteniéndose así el valor esperado del rendimiento cuando el riesgo es mínimo.

Ambos resultados definen un par ordenado, compuesto por el mínimo riesgo de la cartera y su respectivo rendimiento. Dicho punto se representa en un gráfico que frecuentemente se utiliza para ilustrar las resoluciones de este modelo. En el eje de las abscisas se representa el riesgo, mientras que en el de las ordenadas el rendimiento de la cartera.

En el gráfico 1 se ve representado un solo punto, correspondiente al de menor riesgo posible, dados los activos. El problema al que apunta esta sección es el de obtener la frontera eficiente, que se puede definir como la curva sobre la cual, se encuentran todas las combinaciones de los activos riesgosos considerados, que me dan el menor riesgo posible para un determi-

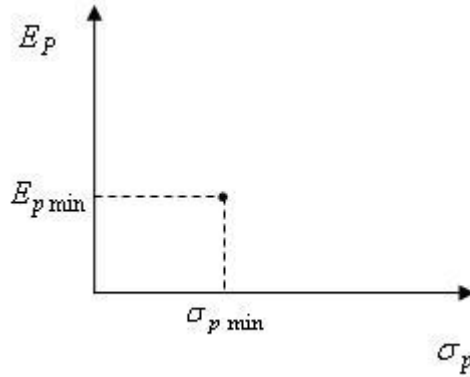


Figura 2.1: Representación gráfica teoría de la cartera

nado rendimiento exigido.

El planteo matemático será similar al del apartado anterior. La función objetivo no cambiará, seguirá siendo la varianza de la cartera. En cuanto a las restricciones, se vuelve a tener la referida a que el individuo invierte el total de su capital, pero ahora también se le agrega una restricción correspondiente al rendimiento exigido. En ella se le exigirá a la cartera un determinado rendimiento, \overline{E}_p , mayor al rendimiento obtenido con la mínima varianza, E_{pmin} .

Luego se procede a la resolución de la minimización, de la cual se obtiene un nuevo par ordenado compuesto por un rendimiento y su respectivo riesgo. Se resuelve el problema para varios valores de \overline{E}_p , elegidos por el que realiza el estudio, y así se obtiene un conjunto de puntos con el cual se puede trazar la frontera eficiente. Para poder trazar la frontera eficiente se deberá contar con varios puntos óptimos, correspondientes a diferentes \overline{E}_p , lo que significa que se deberá realizar la minimización varias veces. Para una resolución eficiente de este problema se añade un anexo con dicha tarea realizada con la herramienta Solver de Microsoft Excel.

Ahora se plantea lo anterior matemáticamente.

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sigma_p^2 = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_n^2 \cdot \sigma_n^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} \\
 \text{s.a.} \quad & \begin{cases} \overline{E}_p = X_1 \cdot E_1 + X_2 \cdot E_2 + \dots + X_n \cdot E_n & \forall \overline{E}_p > E_{pmin} \\ X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Al tener dos restricciones la función de Lagrange queda planteada de la siguiente manera:

$$L = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_n^2 \cdot \sigma_n^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} + \lambda_1 \cdot (\overline{E_p} - \sum_{i=1}^n X_i \cdot E_i) + \lambda_2 \cdot (1 - \sum_{i=1}^n X_i)$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial X_1} = 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot X_1 + 2 \cdot \sigma_{1,2} X_2 + \dots + 2 \cdot \sigma_{1,n} \cdot X_n - \lambda_1 \cdot E_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} = 2 \cdot \sigma_2^2 \cdot X_2 + 2 \cdot \sigma_{2,1} \cdot X_1 + \dots + 2 \cdot \sigma_{2,n} \cdot X_n - \lambda_1 \cdot E_2 - \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial X_n} = 2 \cdot \sigma_n^2 \cdot X_n + 2 \cdot \sigma_{n,1} \cdot X_1 + \dots + 2 \cdot \sigma_{n,n-1} \cdot X_{n-1} - \lambda_1 \cdot E_n - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \overline{E_p} - X_1 \cdot E_1 - X_2 \cdot E_2 - \dots - X_n \cdot E_n = 0 \Rightarrow \overline{E_p} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot E_i \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - X_1 - X_2 - \dots - X_n = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 + \dots + X_n = 1 \end{array} \right.$$

Expresándolas en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{1,2} & \cdots & 2\sigma_{1,n} & -E_1 & -1 \\ 2\sigma_{2,1} & 2\sigma_2^2 & \cdots & 2\sigma_{2,n} & -E_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n,1} & 2\sigma_{n,2} & \cdots & 2\sigma_n^2 & -E_n & -1 \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{E_p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como en el apartado anterior, resolvemos el sistema $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma_1^2 & 2\sigma_{1,2} & \cdots & 2\sigma_{1,n} & -E_1 & -1 \\ 2\sigma_{2,1} & 2\sigma_2^2 & \cdots & 2\sigma_{2,n} & -E_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\sigma_{n,1} & 2\sigma_{n,2} & \cdots & 2\sigma_n^2 & -E_n & -1 \\ E_1 & E_2 & \cdots & E_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{E_p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al resolver este sistema precedente para varios valores de $\overline{E_p} > E_{pmin}$,

como se dijo antes, se obtienen los X_i correspondientes a cada valor de E_p ; que se reemplazan en la función objetivo para calcular los respectivos σ_p^2 y también los σ_p , y en $E_p = \sum_{i=1}^n X_i \cdot E_i$ (el valor esperado del rendimiento para cada nivel de riesgo).³

Por lo tanto, para los distintos rendimientos esperados $\overline{E_p}$ requeridos a la cartera, se obtienen los mínimos riesgos compatibles con dichos rendimientos. Así se consiguen nuevos pares ordenados del tipo $(\sigma_p; E_p)$, que conforman la frontera eficiente.

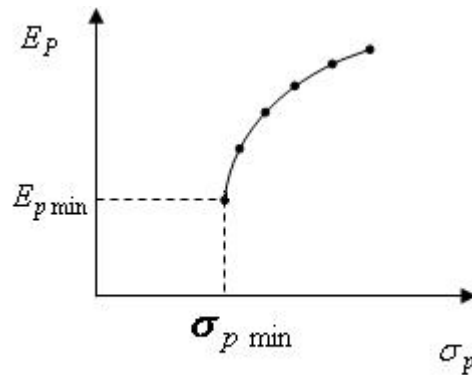


Figura 2.2: Frontera eficiente

Cabe destacar que la frontera eficiente será la misma para todos los inversores, siempre y cuando no haya información asimétrica. Esto quiere decir que si todos los inversores poseen los mismos datos sobre los activos, construirán la misma frontera eficiente. De ahí en más cada uno decidirá cual de las infinitas carteras eficientes le conviene según su aversión al riesgo. Dadas las distintas posturas de ellos frente al riesgo surgen diferentes curvas de indiferencia. Entonces la frontera es algo objetivo que se determina según los datos del mercado; mientras que las curvas de indiferencias, que surgen de las distintas funciones de utilidad de los individuos, es algo subjetivo.

³En este punto habría que corroborar las condiciones de segundo orden. Para no perder el foco de lo que verdaderamente se quiere mostrar en este apartado, dicho paso se deja en manos del lector, que ya posee la herramientas necesarias para poder comprobar si el punto crítico es un mínimo.

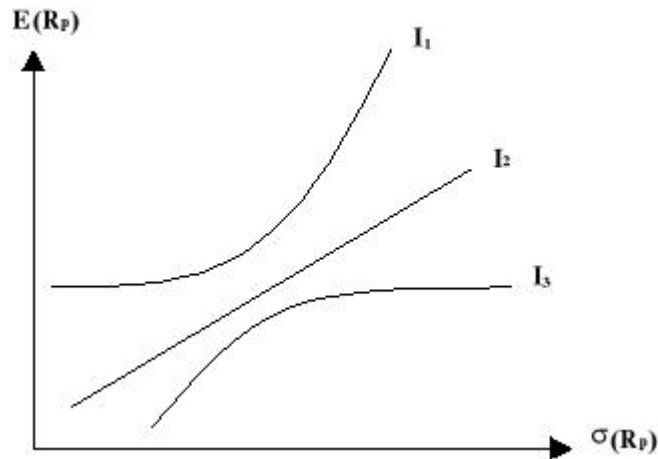


Figura 2.3: Tipos de curvas de indiferencia.

La curva I_1 representa la de un agente averso al riesgo, I_2 la de uno neutral e I_3 la de uno con preferencias por el riesgo.

Generalmente se trata a los inversores como aversos al riesgo. En ese caso se puede notar que la frontera eficiente es convexa y las curvas de indiferencia cóncavas. La cartera óptima para un inversor en particular será entonces la que queda determinada por el punto de tangencia entre la frontera eficiente y una de las curvas de indiferencia. Esto garantiza la mayor ordenada al origen posible, o sea el mayor rendimiento, y el menor riesgo asociado. Dicho punto indica el riesgo y rendimiento de la cartera. Para obtener los porcentajes a invertir en cada uno de los activos no hace falta más que reemplazar el rendimiento en la restricción de nuestro problema y minimizar la varianza.

Conclusiones.

Este modelo, desarrollado en la década de los cincuenta del siglo pasado, por Harry Markowitz es considerado como el nacimiento de la teoría de la selección de carteras. Con su primer trabajo en 1952, al cual se le prestó poca atención, y con otro publicado en 1959, en el que presenta con mayor detalle

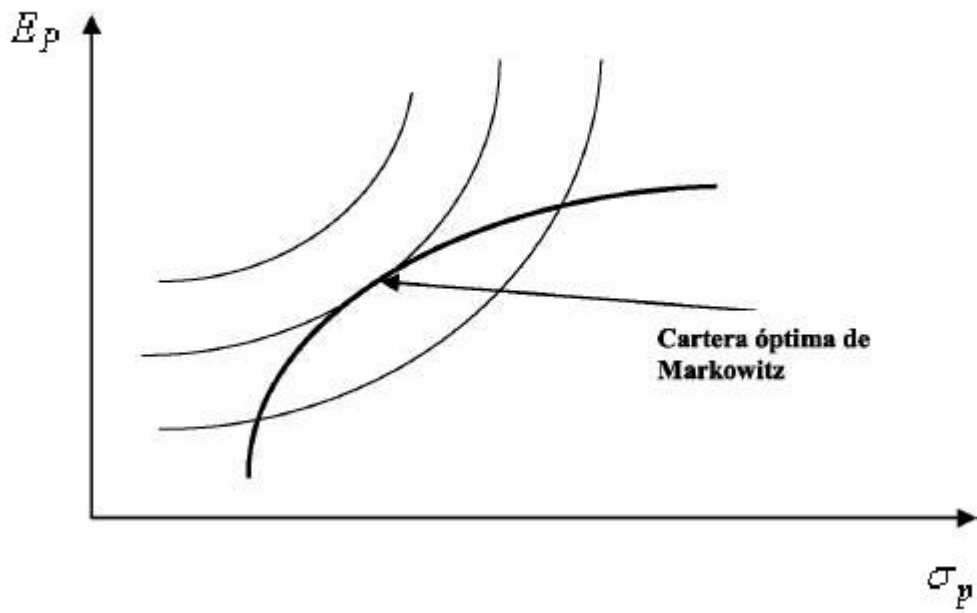


Figura 2.4: Condición de tangencia

su formulación inicial, generó el punto de partida para posteriores desarrollos.

El principal aporte de Markowitz, sin restar méritos a su tratamiento analítico, es haber recogido de forma explícita en su modelo los rasgos fundamentales de lo que se considera una conducta racional del inversor. Además analizando la frontera de carteras eficientes, un inversor puede analizar una cartera que tenga en mente y ver si cumple con la eficiencia marcada por este modelo. Si cumple puede quedarse tranquilo con su decisión puesto que a optado bien, y sino también puede corregirla.

Vale recordar, que este trabajo se trató de una presentación al tema, tanto teórica como práctica. Sin embargo, el lector puede ahondar sus conocimientos en varios sentidos. Primero, dentro del modelo se puede tomar en cuenta activos libres de riesgo. Esto genera nuevas posibilidades de inversión. Luego, se pueden estudiar nuevos modelos desarrollados a partir del aporte de Markowitz. Dado que existen ciertos aspectos negativos, como lo puede ser su difícil aplicación en la realidad, debido a las innumerables estimaciones que se necesitarían para abarcar una cantidad representativa de activos, surgen otros modelos. Uno de ellos es el modelo diagonal de Sharpe, que florece para solucionar este problema. Otras teorías de valoración de activos financieros son el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) y el *Arbitrage Pricing Theory* (APT).

Anexo.

En este apartado se construirá la frontera eficiente en base al ejercicio práctico de la sección 2 del presente trabajo. Para ello se utilizará la herramienta Solver del Microsoft Excel. Como primera medida hay que corroborar que esta herramienta se encuentre activada. Entonces se hace click en el menú Herramientas dentro del Excel, luego en la opción Complementos. Ahí se abrirá una ventana con varias opciones y se debe marcar Solver para poder ser utilizado. Una vez hecho esto se puede comenzar con la resolución.

El primer paso que se debe hacer entonces es encontrar la cartera de mínima varianza posible, tal como se hizo en la sección 1. Antes que nada se deben cargar los datos con los que se cuentan. Se debe incluir entonces la Matriz de Covarianzas. Luego, se escriben las variables de elección, dejando

las celdas contiguas vacías. Después se introduce la función objetivo, que en nuestro caso es la Varianza de la cartera. Al realizar esto se debe insertar la fórmula de la Varianza, en este caso hecho en la celda D13 y referenciado a cada una de las celdas involucradas, sean covarianzas o porcentajes. Finalmente la restricción, en la celda B20 se incluye la fórmula de Sumatoria de los 3 porcentajes de la manera siguiente: +G12+G13+G14. Y en la celda D20 se escribe un 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3			Matriz de covarianzas				
4				Activo 1	Activo 2	Activo 3	
5			Activo 1	0,3442	-0,0116	0,1883	
6			Activo 2	-0,0116	0,3814	-0,0373	
7			Activo 3	0,1883	-0,0373	0,2901	
8							
9							
10							
11		Función Objetivo				Variables de elección	
12						X ₁	0,1944
13		Varianza de la Cartera			0,13752	X ₂	0,4056
14			Desvío	0,37084		X ₃	0,4000
15							
16							
17		Restricción					
18							
19		X ₁ + X ₂ + X ₃ = 1					
20			1	igual a	1		

Figura 2.5: Planteo problema en pantalla del Excel

Ahora estamos en condiciones de utilizar el Solver. Seleccionar con el Mouse la opción Solver que se encuentra en la solapa de Herramientas. Se abrirá la siguiente ventana: Donde dice celda objetivo, seleccionar la celda en donde desarrollamos la fórmula de la Varianza. Escoger la opción de encontrar un Mínimo. Donde dice Cambiando las celdas seleccionar las 3 celdas contiguas

a las variables de elección (en este caso G12, G13 Y G14). Por último, falta la restricción, hacer click en agregar, se abrirá una nueva ventana en la cual se debe marcar la celda en la cual agregamos la sumatoria de los porcentajes (B20), igualada a la celda con un 1 (D20). Hacer click en resolver, y ya se tendrán los resultados.



Figura 2.6: Ventana de parámetros del Solver.

Ahora se puede pasar a construir la frontera eficiente. El procedimiento es similar solo que se debe añadir el rendimiento al problema, y consigo una nueva restricción referente a alcanzar distinto rendimientos. Una vez que añadimos los rendimientos individuales de los activos, el rendimiento de la cartera (con una celda adyacente con su fórmula), y la nueva restricción que le exige al problema un determinado rendimiento, hacemos nuevamente click en Solver, dentro de Herramientas.

Se realiza el mismo proceso que antes, con la única diferencia de agregarle la nueva restricción. Se resuelve para varios valores de rendimientos exigidos y así se obtienen los puntos a partir de los cuales se puede trazar la frontera eficiente. Para ello también se puede utilizar el graficador del Excel, utilizando la serie de datos que hayan generado las sucesivas optimizaciones.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4			Matriz de covarianzas							
5				Activo 1	Activo 2	Activo 3				
6			Activo 1	0,3442	-0,0116	0,1883				
7			Activo 2	-0,0116	0,3814	-0,0373				
8			Activo 3	0,1883	-0,0373	0,2901				
9										
10										
11		Función Objetivo				Variables de elección				
12						X₁				
13		Varianza de la Cartera		0,00000		X₂				
14		Desvío		0,00000		X₃				
15										
16										
17		Restricciones				Rendimientos			Rendimiento Cartera	
18						E₁	2,3360		0,0000	
19		$X_1 + X_2 + X_3 = 1$				E₂	1,7256			
20		0 igual a		1		E₃	2,8836			
21		$\bar{E}_p = X_1 E_1 + X_2 E_2 + X_3 E_3$		$\forall \bar{E}_p > E_{p, min}$						
22										
23										
24		\bar{E}_p	igual a	\bar{E}_p						
25		0,0000		3						
26				3,25						
27				3,5						
28				3,75						
29				4						
30				4,25						

Figura 2.7: Problema completo en la pantalla del Excel.

Bibliografía.

- Portfolio Selection de Harry Markowitz. Journal of Finance, marzo 1952.
- Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments de Harry Markowitz. Nueva York, 1959.
- Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa de Andrés S. Suárez Suárez. Ed. Pirámide.

Capítulo 3

Programación no lineal: Metodología para la búsqueda de candidatos a óptimo según Kuhn-Tucker.

Martín E. Masci¹

¹Se agradecen los comentarios constructivos y la ayuda brindada por parte de los profesores y ayudantes de la cátedra García Fronti de Matemática para Economistas. Especialmente a Marco Bellocchio, por la ayuda en los aspectos formales y de presentación y a Javier I. García Fronti, por la motivación y la sugerencia bibliográfica. El presente trabajo fue construido con fines didácticos asociados a la materia Matemática para Economistas. El mismo ensaya una visión particular del tema propuesto.

Introducción

Los temas relacionados con programación lineal asociados a la optimización clásica condicionada (maximización de una función objetivo, sujeta a restricciones lineales de igualdad) son muy usuales en análisis de tipo económico. Sin embargo posee muchas limitaciones tanto en su construcción teórica como así también en la interpretación de los resultados obtenidos. No obstante, existe una sofisticación particular al modelo de optimización clásica, que consiste en tratar las restricciones de la función objetivo como desigualdades. Esto es, en forma general:

$$\text{máx } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ sujeto a } \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m \end{cases}$$

Donde b_1, \dots, b_m son todas constantes; el vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ que satisface todas las restricciones es conocido como **conjunto admisible o factible**.

El tratamiento para este tipo de optimizaciones es similar al clásico, donde se plantean las condiciones necesarias de primer orden a partir de la construcción de una función, conocida como *Lagrangiano*, que vincula la función objetivo con las restricciones, incluyendo los multiplicadores de Lagrange (λ_j) asociados a cada restricción. Sin embargo, en los casos clásicos se asume que el número de restricciones debe ser estrictamente menor que el número de variables, condición que no resulta necesaria en el análisis que se está proponiendo. En la programación no lineal, que se intenta abordar, existe un tipo de metodología que surge de las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker que permite encontrar los **candidatos a óptimo local**.

Condiciones de Kuhn-Tucker

Para introducir el procedimiento sistemático válido para hallar los candidatos a solución se debe empezar por definir, al igual que en los casos

clásicos la función de Lagrange, de la siguiente forma general:

$$L(x_i, \lambda_j) = f(x_i) + \lambda_1(b_1 - g_1(x_i)) + \dots + \lambda_m(b_m - g_m(x_i)) \quad (3.1)$$

Con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$. Nótese que es una ecuación que satisface n variables a optimizar con m restricciones, que para el caso, son de desigualdad. De este modo, las condiciones de primer orden que surgen de la maximización planteada están definidas por las derivadas parciales de primer orden con respecto a cada variable, igualadas a cero, esto es:

$$\frac{\partial L(x_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(x_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

En forma adicional, con motivo del tratamiento que surge de las restricciones de desigualdad, se debe agregar otra condición, conocida como **holgura complementaria** (*complementary slackness condition*) que permite trabajar con las restricciones de un modo particular. Establece que el valor de cada λ_j asociado a cada una de las restricciones debe ser mayor o igual a cero cuando éstas últimas se cumplen con igualdad; o cada λ_j debe ser igual a cero cuando las restricciones son de desigualdad estricta. Esto es:

$$\lambda_j \geq 0, \quad \text{con } \lambda_j = 0 \quad \text{si } g_j(x_i) < b_j \quad (3.3)$$

Se dice que una restricción está **activa o binding** cuando la restricción se cumple con igualdad, o en términos más formales, cuando el valor de la restricción valuada en el óptimo, $g_j(x_i^*)$, es igual a la constante b_j . Definida de ese modo, la restricción que se da con desigualdad, se dice inactiva. Nótese que las condiciones (2) y (3), son usualmente conocidas como las **condiciones de Kuhn-Tucker**.

Algunas consideraciones

Las siguientes consideraciones tienen por objetivo **normalizar** el tratamiento de los problemas del tipo propuesto, para así llevar a cabo el método de manera efectiva. Como primera aclaración, es necesario trabajar con propiedades de la función objetivo y las restricciones.

Nótese que minimizar $f(x_i)$ es equivalente a maximizar $-f(x_i)$, propiedad

que deviene de las características topológicas de la función objetivo y que resulta particularmente útil en diversos análisis de tipo económico.

Adicionalmente, una restricción expresada de la forma $g(x_i) \geq b_j$ puede ser re-expresada como $-g(x_i) \leq -b_j$. Del mismo modo, una restricción de igualdad de la forma $g(x_i) = b_j$ es equivalente al par de restricciones $g(x_i) \leq b_j$ y $-g(x_i) \leq -b_j$.

Lo antedicho adquiere una importancia considerable dado que se puede reescribir (o *normalizar*) cualquier problema con el objetivo de tratarlo en su forma general, expuesta en el comienzo del presente trabajo.

Por cuestiones de simplicidad se asume que se cumplen ciertas condiciones necesarias y suficientes que conjuntamente con las condiciones de Kuhn-Tucker garantizan que el óptimo obtenido es global; esto implica suponer la cualificación de las restricciones y otras cuestiones asociadas al comportamiento de las funciones intervinientes. Por esta cuestión se asume que tanto $f(x_1, \dots, x_n)$ como $g_j(x_1, \dots, x_n)$ son funciones continuamente diferenciables de primer orden, es decir, pertenecen al conjunto de funciones de tipo C^1 .

Ejercicios de aplicación

Los siguientes ejercicios tienen por objetivo mostrar la resolución del tipo de problemáticas que se vienen describiendo. El modo de resolución será el de encontrar un procedimiento metodológico pautado, aplicable a los ejercicios propuestos.

En cada caso voy a citar las fuentes bibliográficas de donde se pueden encontrar información o ejercicios adicionales los cuales creo conveniente resolver y que por cuestiones didácticas no son desarrollados en el presente trabajo.

Ejemplo simple

El siguiente ejercicio fue extraído del libro *Further Mathematics for Economic Analysis*, Sydsæter, K; Hammond, P; Seierstad, A y Strom, A (2008), Pearson Education. Capítulo 3, sección 5, example 1.

$$\text{máx } f(x, y) = -(x - 2)^2 - (y - 3)^2 \quad \text{sujeto a } x \leq 1, y \leq 2$$

Se puede ver que el caso se encuentra normalizado de acuerdo a las pautas establecidas en la sección 3 del presente, por lo tanto se pueden plantear las condiciones de Kuhn-Tucker.

De esta manera se procede a confeccionar el *Lagrangiano* asociado al ejemplo, para luego derivar del mismo las condiciones de primer orden.

$$L(x, y, \lambda_j) = -(x - 2)^2 - (y - 3)^2 + \lambda_1(1 - x) + \lambda_2(2 - y)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} L_x &= -2(x - 2) - \lambda_1 = 0 && (i) \\ L_y &= -2(y - 3) - \lambda_2 = 0 && (ii) \\ \lambda_1 &\geq 0, \quad \text{con } \lambda_1 = 0 \quad \text{si } x < 1 && (iii) \\ \lambda_2 &\geq 0, \quad \text{con } \lambda_2 = 0 \quad \text{si } y < 2 && (iv) \end{aligned}$$

Consideremos el **procedimiento sistemático**, esto es, plantear los casos posibles donde las restricciones sujetas a la holgura complementaria, adquieren caracter activo o no.

Caso I - ambas restricciones **activas**:

De condiciones (iii) y (iv) surge que $x^* = 1 \wedge y^* = 2$. Reemplazando en (i) y (ii), se encuentran los valores de λ_i , siendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Dado que los valores encontrados no contradicen ninguna de las condiciones anteriores, entonces el punto $(x^*; y^*) = (1; 2)$ es un **candidato a óptimo local**.

Caso II - primera restricción **activa**, segunda **inactiva** $\Rightarrow \lambda_2 = 0$ por (iv):

De (ii) surge que $y^* = 3$. Esto contradice la restricción $y \leq 2$ del ejercicio en su planteo original.

Por lo tanto, no existen candidatos a óptimo para este caso.

Caso III - primera restricción **inactiva**, segunda **activa** $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ por (iii):

De (i) surge que $x^* = 2$. Del mismo modo que el caso anterior, esto contradice

la restricción $x \leq 1$ del ejercicio en su planteo original.
 Por lo tanto, no existen candidatos a óptimo para este caso.

Caso IV - ambas restricciones **inactivas** $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ por (iii) y (iv):
 De (i) y (ii) surgen $x^* = 2 \wedge y^* = 3$. Aquí se experimenta el mismo absurdo que en los casos anteriores.
 Por lo tanto, no existen candidatos a óptimo para este caso.

Los cuatro casos planteados arrojaron solo un punto que es candidato a óptimo, $(x^*; y^*) = (1; 2)$, que en la función objetivo devuelven $f(1; 2) = -2$, siendo este valor el máximo asequible, dadas las restricciones.

Otro ejemplo

El siguiente ejercicio fue extraído del libro *Further Mathematics for Economic Analysis*, Sydsæter, K; Hammond, P; Seierstad, A y Strom, A (2008), Pearson Education. Capítulo 3, sección 5, example 2.

$$\text{máx } f(x, y) = xy + x^2 \quad \text{sujeto a } g_1(x, y) = x^2 + y \leq 2, \quad g_2(x, y) = y \geq 1$$

Nótese que el ejemplo, viene dado con la restricción $g_2(x, y) = y \geq 1$, no normalizada. Por lo dicho en la sección 3, se puede transformar en $-y \leq -1$. Hecho esto, se puede proceder a desarrollar las condiciones de Kuhn-Tucker, para continuar con el procedimiento metodológico necesario:

Lagrangiano asociado:

$$L(x, y, \lambda_j) = xy + x^2 + \lambda_1(2 - x^2 - y) + \lambda_2(-1 + y)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\begin{array}{ll} L'_x = y + 2x - 2\lambda_1 x = 0 & (i) \\ L'_y = x - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (ii) \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \text{con } \lambda_1 = 0 \quad \text{si } x^2 + y < 2 & (iii) \\ \lambda_2 \geq 0, \quad \text{con } \lambda_2 = 0 \quad \text{si } -y < -1 & (iv) \end{array}$$

Procedimiento metodológico:

Caso I - ambas restricciones **activas**:

Dado que las restricciones activas se cumplen con igualdad, se deduce que $x^2 + y = 2 \wedge y=1 \Rightarrow x^* = \pm 1, y^* = 1$.

Cuando $x^* = y^* = 1$, de (i) y (ii), se desprende $\lambda_1 = 3/2$ y $\lambda_2 = 1/2$.

Y cuando $x^* = -1 \wedge y^* = 1$, de (i) y (ii), se desprende $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = 3/2$. Por lo antedicho y comprobando que nada de lo encontrado contradice ninguna restricción y/o condición necesaria, se puede decir que $(x^*, y^*) = (1, 1) \wedge (x^*, y^*) = (-1, 1)$ son ambos **candidatos a óptimo local**.

Caso II - primera restricción **activa**, segunda **inactiva** $\Rightarrow \lambda_2 = 0$ por (iv):

De (ii) se desprende que $x = \lambda_1$. Insertando esto en (i), surge que $y + 2x - 2x^2 = 0$, por lo que, si se despeja y de la restricción activa (condición (iii)) y se la reemplaza en lo anterior, obtenemos $3x^2 - 2x - 2 = 0$. De esta manera $x^* = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{7})$, pero como $x = \lambda_1 \geq 0$ el único x^* factible es $x^* = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{7})$. Sabiendo que $y^* = 2 - x^2 = \frac{2}{9}(5 - \sqrt{7})$, y esta expresión es menor a 1 (contradiciendo la segunda restricción), se concluye que no hay candidatos a óptimo local para este caso.

Caso III - primera restricción **inactiva**, segunda **activa** $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ por (iii):

De (iv) se deduce que $y^* = 1$. Con esto reemplazado en (i) se obtiene $x^* = -1/2$; y de (ii) que $\lambda_2 = 1/2$.

Los valores hallados no contradicen ni las restricciones ni las condiciones por lo que el punto $(x^*, y^*) = (-1/2, 1)$ es **candidato a óptimo local**.

Caso IV - ambas restricciones **inactivas** $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ por (iii) y (iv):

De (ii) surge que $x^* = 0$, que reemplazado en (i) nos devuelve el valor de $y^* = 0$, lo cual contradice la segunda restricción del problema.

Por lo tanto, no hay candidatos a óptimo local asociados a este caso.

Los cuatro casos planteados arrojaron tres puntos candidatos a óptimo local: $\{(1, 1); (-1, 1); (-1/2, 1)\}$. En la función objetivo nos devuelven los siguientes valores asociados: $f(1, 1) = 2$, $f(-1, 1) = 0$, $f(-1/2, 1) = -1/4$. Siendo que

el primer candidato nos otorga el mayor valor de la función, **el óptimo local en este ejercicio es** $(x^*, y^*) = (1, 1)$.

Ejemplo de Minimización

El siguiente ejercicio fue extraído del libro *Métodos fundamentales de Economía Matemática*, Chiang, A y Wainwright, K (Cuarta Edición, 2006), Mc Graw Hill. Capítulo 13, pags. 410-411. El mismo fue tomado en cuenta como ejercicio, pero no contempla la resolución metodológica que se viene exponiendo.

El problema viene dado como una minimización, de la siguiente forma:

$$\text{mín } C(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \text{ sujeto a } \begin{cases} g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ g_2(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 \geq -12 \end{cases}$$

Adicionalmente plantea restricciones de no-negatividad para las variables a optimizar, esto es $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$.

Este tipo de condiciones adicionales adquieren vital importancia en problemas de tipo económicos, dado que en general se busca, para el caso del consumidor, maximizar su función de utilidad, sujeta a una restricción presupuestaria. El individuo debe elegir las cantidades a consumir de n bienes, siendo éstos todos deseables por ser bienes y no males, con lo cual el individuo deseará consumir cantidades mayores o iguales a cero. Un caso similar o análogo sucede cuando una firma toma decisiones de producción, en función del beneficio económico a maximizar. De esta manera este tipo de condiciones le otorgan al problema mayor realidad y aplicación a la vida cotidiana.

Por simplicidad, es conveniente no incluir estas dos restricciones en la construcción del *Lagrangiano*, dado que de ese modo se debe asociar dos λ adicionales, haciendo que los casos que se deben analizar sean muchos más, haciendo más engorroso su tratamiento. Resulta conveniente simplemente analizar los cuatro casos que surgen de las dos restricciones (g_1, g_2) , y dentro de cada uno descartar los puntos que son solución, pero que las variables tomen valores negativos.

Dicho esto, se procede a *normalizar* el problema, esto es transformarlo en un

problema de maximización y reescribir las restricciones de la forma propuesta en la sección 3, $-g(x_i) \leq -b_j$:

$$\text{máx } -C(x_1, x_2) = -(x_1-4)^2 - (x_2-4)^2 \text{ sujeto a } \begin{cases} -g_1(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ -g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases}$$

De esta manera armamos la función *Lagrangiana*:

$$L(x_1, x_2, \lambda_j) = -(x_1-4)^2 - (x_2-4)^2 + \lambda_1(-6 + 2x_1 + 3x_2) + \lambda_2(12 - 3x_1 - 2x_2)$$

Condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= -2(x_1 - 4) + 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 && (i) \\ L_{x_2} &= -2(x_2 - 4) + 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 && (ii) \\ \lambda_1 &\geq 0, \quad \text{con } \lambda_1 = 0 \quad \text{si } -2x_1 - 3x_2 < -6 && (iii) \\ \lambda_2 &\geq 0, \quad \text{con } \lambda_2 = 0 \quad \text{si } 3x_1 - 2x_2 < 12 && (iv) \end{aligned}$$

Procedimiento metodológico:

Caso I - ambas restricciones **activas**:

Dado que las restricciones al hacer *binding* se cumplen con igualdad, de (iii), surge la relación entre las variables: $x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2$.

Reemplazando esta relación en (iv), se obtiene el valor de $x_2^* = -\frac{6}{5}$.

Como este valor es menor a cero y por tanto contradice la condición de no-negatividad implícita, entonces se puede decir que no existe candidatos a óptimo para este caso.

Caso II - primera restricción **activa**, segunda **inactiva** $\Rightarrow \lambda_2 = 0$ por (iv):

De (i) y (ii), despejando λ_1 , se obtiene una relación entre las variables: $x_2 = \frac{3}{2}x_1 - 2$. Reemplazando esta expresión en la primera restricción que al estar activa se cumple con igualdad; Queda así determinado $x_1^* = 0$ y $x_2^* = -2$.

Por el mismo motivo que el caso anterior, no existen candidatos a óptimos asociados a este caso.

Caso III - primera restricción **inactiva**, segunda **activa** $\Rightarrow \lambda_1 = 0$ por

(iii):

De forma análoga al caso anterior se despeja λ_2 de (i) y (ii), y se obtiene que $x_1 = \frac{3}{2}x_2 - 2$. Reemplazado en la segunda restricción (que se cumple con igualdad), surge el valor de $x_2^* = \frac{36}{13}$ y $x_1^* = \frac{28}{13}$. Al sustituir estos valores en (ii), se determina el valor de $\lambda_2 = \frac{16}{13}$.

Los valores hallados no contradicen ni las restricciones ni las condiciones por lo que el punto $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{28}{13}, \frac{36}{13})$ es **candidato a óptimo local**.

Caso IV - ambas restricciones **inactivas** $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ por (iii) y (iv):

En este caso la resolución se presenta casi en forma intuitiva. Dado que ambos los multiplicadores de Lagrange son iguales a cero, de (i) y (ii), se deduce que $x_1 = x_2$.

Si se reemplaza la igualdad encontrada en (iii), por caso para x_1 , queda que $x_1 > \frac{6}{5}$. Si el reemplazo se realiza en (iv), por caso $x_1 < \frac{12}{5}$.

Dado de esa forma, no existen candidatos a óptimo asociados a este caso.

Siendo que de todos los casos se llegó a un único punto candidato a óptimo, que valuado en la función objetivo nos devuelve el máximo valor posible dado las restricciones, $C(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}) = \frac{64}{13}$, y que el punto satisface las condiciones a las cuales se sometió el problema, entonces $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{28}{13}, \frac{36}{13})$, es el **óptimo local en este ejercicio**.

Conclusión y observaciones finales

A modo de conclusión, se puede realizar un esquema general del procedimiento que se viene desarrollando en el presente trabajo.

Toda vez que se presente un problema de optimización con restricciones de la forma $g_j(x_i) < b_j$ con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$ y tanto la función objetivo como las restricciones puedan ser no lineales, se puede llevar a cabo un procedimiento lógico y sistemático para buscar los puntos (pares ordenados) que satisfacen las condiciones de primer orden del problema y sean, por tanto, candidatos a óptimo local. El procedimiento al que se hace referencia requiere ser llevado a cabo en forma ordenada y prestando atención de no cometer errores que produzcan inconsistencias lógicas matemáticas.

Como primer paso se debe reexpresar el problema (siempre que sea necesario) bajo los lineamientos establecidos en la introducción del presente trabajo. Esto permite garantizar la correcta exposición de las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker, que resulta el segundo paso en este proceso sistemático.

Finalizado lo antedicho, el problema en cuestión presenta el aspecto formal deseado para su resolución. De las condiciones de holgura complementaria, se desprenden los casos críticos que se deben analizar sistemáticamente para hallar los candidatos a óptimo. El procedimiento subsiguiente se basa en tomar cada caso en forma aislada y resolver mediante la aplicación de los conceptos matemáticos asociados a las condiciones necesarias de óptimo local, cuidando de no cometer errores de lógica que introduzcan inconsistencia en los puntos que se pueden encontrar.

Si el trabajo fue realizado siguiendo las pautas antepuestas, el resultado en cada caso puede arrojar uno, más de uno o ningún punto (par ordenado) que sea candidato a óptimo local. Dado que puede ser factible que existan múltiples candidatos, el criterio de selección del único óptimo local, es simplemente evaluar la función objetivo en cada punto candidato y observar en cuál de estos arrojo el mayor valor.

El hecho de tratar las restricciones como desigualdades le otorga al problema de optimización mayor realismo empírico, con mayor complejidad de análisis, que obliga de algún modo a llevar a cabo el proceso de resolución de manera ordenada, garantizando en cada paso la consistencia lógica necesaria.

Bibliografía.

- Further Mathematics for Economic Analysis de Sydsæter, K;Hammond, P; Seierstad, A y Strom, A. Pearson Education 2008.
- Métodos fundamentales de Economía Matemática de Chiang, A. y Wainwright, K. Mc Graw Hill, Cuarta edición 2006.
- Matemática para economistas con Excel y Matlab de Bernardello, A; Bianco, M; Casparri, M; García Fronti, J; Olivera de Marzana, S. Editorial Omicron 2004.

Capítulo 4

Optimización dinámica: modelo de recursos no renovables con contaminación ambiental.

Alicia Bernardello, Agustina Ruston, Verónica García Fronti.

Introducción:

El Cambio climático es uno de los grandes desafíos que se le presenta a la humanidad hoy en día. La principal causa de cambio climático es la acumulación de ciertos gases en la atmósfera, denominados "Gases de efecto invernadero", que potencian un efecto natural conocido como "efecto invernadero". Esto deriva en el aumento de la temperatura media superficial del planeta (calentamiento global) lo que ocasiona impactos positivos y negativos en el ambiente. En respuesta a este cambio global existen medidas de MITIGACIÓN, que atacan las causas del problema es decir que buscan reducir las emisiones de gases de efecto invernadero (GEI). En el sector energético de Argentina, se genera principalmente dióxido de carbono (uno de los GEI) proveniente principalmente de la combustión de hidrocarburos fósiles en las actividades de generación de energía, transporte y el agro.

En este trabajo analizaremos como al generar electricidad a partir de un combustible fósil se debe tener en cuenta que no sólo los combustibles fósiles son recursos no renovables sino también que al utilizárselos se genera contaminación al emitirse dióxido de carbono que es uno de los gases de efecto invernadero causante del cambio climático.

Antes de comenzar con la descripción del tema nos pareció importante destacar que el objetivo fundamental de este trabajo es hacer comprender al alumno de Matemática para Economistas sobre el uso concreto de la herramienta de CONTROL ÓPTIMO a través de un modelo que muestra un problema real como es el agotamiento de los recursos energéticos no renovables y la contaminación ambiental que estos generan.

Elegimos este tipo de modelo, en el que tenemos en cuenta la contaminación ambiental porque consideramos que el factor ambiental debe estar presente en los diversos análisis de gestión de los recursos no renovables y dentro del centro en el que trabajamos (Centro de Investigaciones en Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía y la Gestión) estamos involucradas en diversos proyectos en donde el foco esta puesto en analizar los impactos económicos y financieros del Cambio climático en Argentina.

Recursos no renovables y contaminación.

Los recursos no renovables son aquellos para los cuales no existe un proceso natural y espontáneo de regeneración. La corteza terrestre alberga una cantidad fija de recursos no renovables y cualquier extracción sólo puede disminuir la disponibilidad de los mismos para el futuro. Es decir, su consumo implica una disminución permanente del stock.

Dentro de los recursos no renovables, mención especial merecen los combustibles fósiles, formados en el curso de millones de años a partir de los restos de plantas y animales microscópicos. En la actualidad el combustible fósil más importante es el petróleo, seguido del gas natural. Ambos, el petróleo y el gas natural aportan dos tercios de la energía mundial y son materia prima esencial para 30.000 compuestos químicos. Es decir, los recursos no renovables son esenciales para el funcionamiento del sistema productivo, por esta razón el debate sobre su agotamiento y las posibles consecuencias de menor abundancia futura tienen especial trascendencia para las futuras generaciones. Es así que cuando se hace cualquier análisis sobre un recurso no renovable la pregunta en cuestión es: ¿Qué cantidad debe extraerse cada año para los usos corrientes? O lo que es lo mismo ¿Qué cantidad debe permanecer en el subsuelo como reserva para usos futuros?

Al tener un stock determinado del combustible fósil se debe planificar una estrategia para su uso en la que se tiene en cuenta lo que se consumió en el pasado y lo que se quiere dejar para el futuro, es decir, cuanto se usa hoy del recurso influirá en lo que se tenga del mismo para el futuro.

Al generar energía eléctrica a partir de combustibles fósiles se deben tener en cuenta dos características del mismo, por un lado que es un recurso no renovable y por otro lado que para generar energía eléctrica a partir de un combustible fósil se genera como subproducto de esta operación dióxido de carbono (CO_2).

Surge así la necesidad de una política óptima de extracción y consumo que se le debe dar a un recurso no renovable teniendo en cuenta, por un lado, el stock del que se dispone, para asegurar que se dispondrá del recurso por un período determinado y, por otro lado, las emisiones de CO_2 que su uso provoca.

Resumiendo, si se piensa en un uso racional de los recursos no renovables para la generación de energía se deben tener en cuenta, por un lado,

la disponibilidad del recurso y, por otro lado, el impacto ambiental que el recurso provoca.

Es decir, analizaremos cuál es la trayectoria de la tasa de extracción de petróleo en un período predeterminado que optimiza nuestra función objetivo a la que denominamos utilidad social.

Teoría del control óptimo.

La teoría del control óptimo es una técnica matemática que nos permite resolver problemas de optimización en sistemas que evolucionan con el tiempo.

A través de la teoría de control óptimo se determina la trayectoria temporal de una variable que es posible controlar de manera de optimizar el desempeño de algún criterio expresado a través de una función objetivo. El problema de control óptimo lo podemos enunciar en forma simplificada como:

$$\text{Max} \int_0^T f(t, y, u) dt$$

sujeto a:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u)$$

y las condiciones de contorno

Para resolver este problema se utiliza el principio del máximo en donde se involucra a la función Hamiltoniana que se define de la siguiente manera para el problema planteado:

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x, u) + \lambda(t)f(t, x, u)$$

Si el hamiltoniano es diferenciable para todos los valores admisibles de la variable de control (u) las condiciones que establece el principio del máximo son:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$
$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

Condición de transversalidad apropiada

Se plantea así un sistema de ecuaciones y resolviendo este sistema vamos a obtener la dinámica del sistema óptima. Es decir que trayectorias siguen, en un período determinado las variables de control y de estado para optimizar la función objetivo.

Modelo de uso de energía y calidad ambiental

Como hemos mencionado, el modelo presenta dos puntos clave, el primero, tiene en cuenta el consumo de energía que es producida a partir de un combustible fósil (recurso no renovable), el segundo, la generación de contaminación ambiental como causa de producción de energía. La pregunta que surge entonces es cómo analizar cuál es el camino óptimo de consumo de un combustible fósil. Contestaremos esta pregunta con la teoría de control óptimo utilizando el modelo de Bruce A. Forster.¹ Sea $S(t)$ un inventario de combustible fósil y $E(t)$ la tasa de extracción del combustible fósil de forma que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

Por otro lado, la tasa de extracción (E) está directamente relacionada con la producción de bienes y servicios para su posterior consumo (C), lo cual en principio crea utilidad, pero también genera contaminación ambiental o polución (P). Así la función utilidad depende del consumo y la polución. Forster especifica la función consumo y la función contaminación como sigue:

$$C = C(E)$$

Donde:

$$\begin{cases} C' > 0 \\ C'' < 0 \end{cases}$$

¹Forster, Bruce A., profesor del departamento de economía de la Universidad de Wyoming (Estados Unidos) y de la Universidad de Guelph (Canada)

El consumo aumenta pero la velocidad del mismo disminuye cuando se consume mayor tasa de energía.

$$P = P(E)$$

Donde:

$$\begin{cases} P' > 0 \\ P'' > 0 \end{cases}$$

La contaminación y la velocidad de la misma aumentan cuando se consume mayor tasa de energía. Por simplicidad la contaminación se considera como no acumulativa (es decir que es un flujo que se disipa, no existe un inventario de la misma). Así, nuestra función de utilidad depende sólo del consumo y la contaminación:

$$U = U(C)$$

$$\text{Donde: } U_C > 0 \quad U_P < 0 \quad U_{CC} < 0 \quad U_{PP} < 0 \quad U_{CP} = 0$$

Dado que tanto la contaminación como el consumo dependen de la tasa de uso de energía, podemos ver intuitivamente que la utilidad depende principalmente de esta a través del consumo y de la contaminación. Por eso la tasa de uso de energía (E) será nuestra variable de control. Con respecto a la variable de estado es el inventario de combustible fósil (S), es decir en el modelo de optimización:

$E =$ Variable de control

$S =$ Variable de estado

$$\frac{\delta S}{\delta t} = -E$$

Si el ente de energía correspondiente desea definir un plan para el consumo de energía a partir de un combustible fósil de forma tal de maximizar la función utilidad para un intervalo dado $[0, T]$ tendremos el siguiente problema de optimización dinámica:

$$\text{Maximizar } \int_0^T U[C(E), P(E)] dt$$

Sujeto a:

$$\frac{dS}{dt} = -E$$

$$S(0) = S_0$$

$$S(T) \geq 0$$

Con S_0, T dados Como el tiempo final es fijo, es un problema de optimización dinámica con vertical truncada.

La función hamiltoniana para este problema es:

$$H = U [C(E), P(E)] - \lambda E$$

Resolviendo de acuerdo al principio del máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = U_C C(E) + U_P P(E) - \lambda = 0$$

Al resolverlo expresaremos E (uso de energía) en función de la variable de coestado ?

Para tener más información de E necesitamos conocer la trayectoria de la variable de estado, . De acuerdo al principio del máximo, la ecuación de movimiento de es:

$$\lambda = -\frac{\partial H}{\partial S}$$

$$\lambda = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0$$

$$\lambda(t) = C$$

Para definir la constante, C, acudimos a las condiciones de transversalidad, que en nuestro caso es una condición de transversalidad truncada, así que las condiciones tienen la forma:

$$\lambda(T) \geq 0$$

$$S(T) \geq 0$$

$$\lambda(T)S(T) = 0$$

Para utilizar esta condición de transversalidad, en la práctica, probamos con: $\lambda(T) = 0$ a ver si la solución funciona.

Anteriormente vimos que $\lambda(T)$ es una constante, por lo tanto si le imponemos que sea igual a cero en el tiempo T , implica que lo es para todo tiempo t . Así, en la condición de óptimo:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = U_C C'(E) + U_P P'(E) - \lambda = 0$$

$$U_C C'(E) + U_P P'(E) = 0$$

Esta ecuación es independiente de la variable tiempo, es decir su solución es constante en el tiempo.

$E^*(t) = E^*$ si se cumple que $\lambda^*(t) = 0$ Esta solución es aceptable, si se cumple la restricción $S(T) \geq 0$ Por lo tanto debemos hallar el camino de la variable de estado $S(t)$. Si el uso de energía es constante, la ecuación de movimiento de la variable de estado S (inventario):

$$S = -E$$

Integrando:

$$S(t) = -Et + k$$

$$S(0) = k = S_0$$

El camino óptimo del stock de combustible:

$$S^*(t) = S_0 - E^*t$$

Así el camino óptimo que sigue el inventario de combustible es una recta que parte de S_0 en el tiempo inicial 0 y cuya pendiente es la tasa de energía, cuanto mayor sea la tasa de extracción antes llegará el stock del combustible a 0. Veamos gráficamente los datos:

De la ecuación: $S^*(t) = S_0 - E^*t$ y con $S(T) = 0$

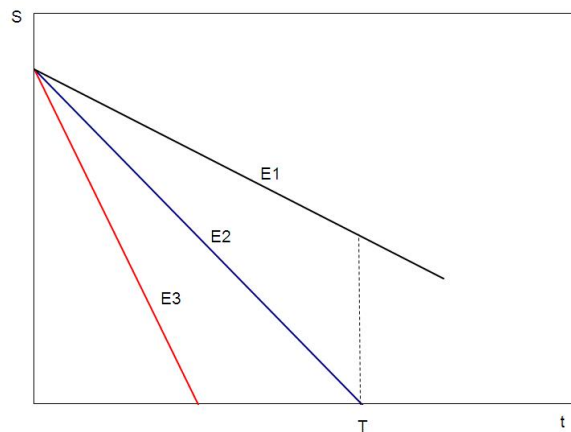


Figura 4.1: Vemos que con una tasa de extracción E1 llegamos al tiempo final T con un stock mayor a cero y con un uso de energía E2 el stock de combustible llega a cero justo en el tiempo final T, por lo tanto estas dos tasas de energía cumplen con la condición de transversalidad: $S(T) \geq 0$. Pero si nuestra tasa de extracción de energía es E3, se consume todo el combustible antes de llegar al tiempo final T y por lo tanto E3 no cumple la restricción $S(T) \geq 0$, por lo tanto, debemos fijar la condición terminal: $S(T) = 0$ y resolver el problema.

$$0 = S_0 - E^*T$$

Despejando la tasa de extracción óptima:

$$E^* = \frac{S_0}{T}$$

En ambos casos hayamos que la tasa óptima del uso de energía es constante a lo largo del tiempo. Esto se debe a que el modelo no considera un factor de descuento, si se introduce el factor de descuento el camino óptimo del uso de energía (E^*) va a ir decreciendo a lo largo del tiempo, con $\lambda^*(t) > 0$ En el otro caso, cuando $\lambda^*(t) = 0$ la variable tasa de extracción, E^* , es constante a lo largo del tiempo.

Ejemplo numérico.

Para facilitar la comprensión de los alumnos resolvimos el modelo utilizando un ejemplo numérico. Como hemos visto en el modelo, la función utilidad social va a depender de dos variables: consumo (C) y contaminación (P). Si se especifica ambas funciones como sigue:

$$C = 800 * \sqrt{E} \quad (1)$$

$$P = E^2 \quad (2)$$

Asimismo, la función utilidad social (U) depende del consumo y la contaminación como sigue:

$$U = 100 * \ln C - \sqrt{P} \quad (3)$$

Reemplazando las ecuaciones 1 y 2 en 3:

$$U = 668,5 + 100 \ln(\sqrt{E}) - E$$

Planteamos, ahora, el problema de optimización dinámica:

$$\max_E \int_0^T 668,5 + 100 \ln(\sqrt{E}) - E$$

$$\text{Sujeto a: } \frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

Condiciones de iniciales y finales:

$$S(0) = S_0$$

$$S(T) \geq 0$$

La función hamiltoniana para este problema es:

$$H = 668,5 + 100 \ln \sqrt{E} + E - \lambda E$$

Condiciones que se cumplen en el óptimo:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = 0 \rightarrow E^* = \frac{50}{(\lambda+1)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial S} = -\lambda \rightarrow \lambda^*(t) = C$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -E \rightarrow S^*(t) = -E^* t + S_0$$

Al resolver este sistema de ecuaciones obtenemos la dinámica del sistema en el punto óptimo, utilizando de las condiciones de transversalidad:

$$\lambda(T) = 0 \qquad S^*(T) \geq 0$$

$$E^* = 50 \cdot \frac{\text{barriles}}{\text{año}} \qquad \frac{S_0}{T} \geq 50 \frac{\text{barriles}}{\text{año}}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} E^*(t) = 50 \\ S^*(t) = -50t + S_0 \\ \lambda^*(t) = 0 \end{cases}$$

Conclusiones

La tasa óptima del uso de energía es constante a lo largo del tiempo, esto se da debido a que en el modelo no se considera un factor de descuento. En el caso de considerar un factor de descuento el recorrido de la tasa óptima dependerá del tiempo y será decreciente a medida que nos acerquemos al horizonte final de extracción. La necesidad de una política económica racional en el uso de energía es necesaria no solo para evitar el agotamiento de los recursos sino también para poder tener en cuenta el efecto contaminante de los mismos.

Bibliografía.

- CHIANG, A.(1992): Elements of Dynamic Optimization. New York, McGraw-Hill.
- CHIANG, A.(2006): Métodos fundamentales de Economía Matemática. New York, McGraw-Hill.
- FORSTER, B.(1980): Optimal Energy Use in a Polluted Environment. Journal of Environmental Economics and Management 7, p. 321-333, Ontario.

Capítulo 5

Modelo de Dornbusch.

Marco Bellocchio y Nahuel Peretti.¹

¹Se agradece la ayuda brindada por parte de los profesores y ayudantes de las cátedras García Fronti y Bernardello de Matemática para Economistas de la Universidad de Buenos Aires, y a los integrantes del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión.

Este trabajo desarrolla didácticamente el modelo de Overshooting cambiario de Rudiger. Dornbusch² siguiendo la síntesis tanto de Giancarlo Gandolfo³ como la de David Golden⁴. El objetivo del mismo es explicar la resolución matemática y la dinámica de ajuste del tipo de cambio y del nivel de precios ante una perturbación de índole monetaria. Se plantea gráficamente el mismo, y también se analiza la estabilidad del sistema y la forma de su rama estable.

²“Expectations and Exchange Rate Dynamics”, Rudiger Dornbusch(1976).

³“International Finance and Open-Economy Macro-economics” Giancarlo Gandolfo.

⁴“Modelo de Overshooting Cambiario (de Dornbusch)”, Davis Golden (2005).

Introducción

El Modelo de Overshooting Cambiario realizado por Rudiger Dornbusch (1976) recurre a las ideas básicas del modelo Mundell-Fleming⁵ (1968) e intenta explicar las fluctuaciones observadas en los tipos de cambio, dado un contexto en el que tales fluctuaciones son consistentes con la formación de expectativas racionales. En el mismo se trabaja con economías pequeñas y abiertas de tipo de cambio flexible.

Que se trabaje con economías pequeñas y abiertas significa que las variables del exterior se consideran variables exógenas dadas. A diferencia del modelo de Mundell-Fleming, Dornbusch introduce la paridad entre la tasa de interés local y las expectativas de ajuste cambiario con la tasa de interés del exterior. También se asume que el tipo de cambio y el mercado de capitales ajustan más rápidamente que el mercado de bienes. De manera que los precios de los bienes responden gradualmente a los excesos de demanda u oferta y existe un equilibrio permanente del mercado de dinero.

Es interesante el enfoque que hace Dornbusch en relación a la "sobrerreacción" (overshooting) que sufre el tipo de cambio cuando intenta alcanzar un nuevo valor de equilibrio a largo plazo.

El Modelo

Movilidad de Capitales y Expectativas Racionales

Una perfecta movilidad de capitales y una perfecta sustituibilidad de los mismos nos definen a la tasa de interés local (i), como la suma de la tasa de interés internacional (i_f) y la tasa esperada de depreciación del tipo de cambio (x).

$$i = i_f + x \tag{5.1}$$

$$x \equiv \frac{\bar{r}}{r}$$

⁵"Capital Movility and Stabilization Policy under Fixed and Flexible Exchange Rates", Robert Mundell(1968).

Por ser una economía pequeña y abierta, i_f es exógeno al modelo. Si consideramos expectativas consistentes, la tasa esperada y la tasa actual de depreciación del tipo de cambio coinciden.

$$\dot{e} = \frac{d \ln r}{dt} = \frac{\dot{r}}{r} \Rightarrow \dot{e} = x \quad (5.2)$$

Combinando (1) y (2):

$$i = i_f + \dot{e} \quad (5.3)$$

El Mercado Monetario

Teniendo en cuenta la condición de equilibrio del mercado monetario:

$$\frac{M}{P} = Y^\Phi \exp(-\lambda i)$$

Siendo M la oferta monetaria, P el nivel de precios, λ la semi-elasticidad⁶ de la demanda monetaria respecto de la tasa de interés, y Φ la elasticidad de la demanda monetaria respecto al ingreso Y . Expresada en términos logarítmicos:⁷

$$m - p = \phi y - \lambda i$$

Reordenando

$$p - m = \lambda i - \Phi y \quad (5.4)$$

Combinando la ecuación anterior con (3) obtenemos:

$$p - m = -\Phi \bar{y} + \lambda i_f + \lambda \dot{e} \quad (5.5)$$

Donde el nivel de ingreso a pleno empleo está dado por \bar{y} . En el largo plazo, el equilibrio con una oferta monetaria constante está definido por:

$$\bar{p} - m = -\Phi \bar{y} + \lambda i_f \quad (5.6)$$

⁶elasticidad porcentual, $0 < \lambda < 1$

⁷ $\ln(\frac{M}{P}) = \ln M - \ln P = m - p$; $\ln[Y^\Phi \exp(-\lambda i)] = \phi \ln Y - \lambda i = \phi y - \lambda i$

Debido a que la tasa esperada y actual de depreciación del tipo de cambio es nula en el largo plazo. Si despejamos \bar{p} en (6) y la combinamos con (5) obtenemos:

$$p = \bar{p} + \lambda \dot{e}$$

ó

$$\dot{e} = \frac{(p - \bar{p})}{\lambda} \tag{5.7}$$

Esta es una de las ecuaciones clave del sistema, en tanto expresa la dinámica de la tasa actual de cambio en términos de la desviación del nivel de precios actual de su equilibrio a largo plazo.

El Mercado de Bienes

La demanda de bienes domésticos depende del precio relativo de los bienes domésticos con respecto a los bienes extranjeros, en términos logarítmicos ($e + p_f - p$); la tasa de interés; y el ingreso real.

$$\ln D \equiv d = u + \delta(e - p) + \gamma y - \sigma i \tag{5.8}$$

Donde u es un parámetro de cambio y P_f es normalizado, por lo tanto $p_f = \ln P_f = 0$. Teniendo en cuenta que los precios cambian en respuesta a los excesos de demanda, en términos logarítmicos:

$$\dot{p} = \pi(d - y), \quad \pi > 0 \tag{5.9}$$

Reemplazando (8) en (9):

$$\dot{p} = \pi[u + \delta(e - p) + (\gamma - 1)y - \sigma i] \tag{5.10}$$

Si consideramos el largo plazo, $\dot{p} = 0$, $p = \bar{p}$, finalmente obtenemos el equilibrio a largo plazo de la tasa de cambio.

$$\bar{e} = \bar{p} + \frac{1}{\delta}[\sigma i_f + (1 - \gamma)y - u] \tag{5.11}$$

$i = i_f$ en el largo plazo

Para encontrar la otra ecuación clave del sistema reemplazamos el interés despejado de (4) en (10).

$$\dot{p} = \pi[u + \delta(e - p) + \frac{\sigma(e - p)}{\lambda} - (1 - \gamma + \frac{\Phi\sigma}{\lambda})y] \quad (5.12)$$

Si consideramos el equilibrio a largo plazo, $\dot{p} = 0$, y despejando obtenemos:

$$(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\bar{p} - \delta\bar{e} = u + \frac{\sigma m}{\lambda} - (1 - \gamma + \frac{\Phi\sigma}{\lambda})\bar{y}$$

Reemplazamos lo anterior en (12) para obtener \dot{p} en función solo de p y e .

$$\dot{p} = -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})(p - \bar{p}) + \pi\delta(e - \bar{e}) \quad (5.13)$$

Finalmente obtuvimos las dos ecuaciones que rigen la dinámica del modelo:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})(p - \bar{p}) + \pi\delta(e - \bar{e}) & (13) \\ \dot{e} = \frac{(p - \bar{p})}{\lambda} & (7) \end{cases}$$

Resolución del Modelo

Resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones para obtener $p(t)$ y $e(t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) & \pi\delta \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p - \bar{p} \\ e - \bar{e} \end{pmatrix}$$

Aplico el método de resolución por ecuación eliminante:

I- Derivo \dot{e} y reemplazo \dot{p} :

$$\ddot{e} = \frac{\dot{p}}{\lambda} = \frac{-\pi}{\lambda}(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})(p - \bar{p}) + \frac{\pi\delta}{\lambda}(e - \bar{e})$$

II- Sabemos que $\dot{e} = \frac{(p - \bar{p})}{\lambda}$, entonces despejamos y reemplazamos en la ecuación anterior

$$\ddot{e} = -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\dot{e} + \frac{\pi\delta(e - \bar{e})}{\lambda}$$

III- Reordeno para que me quede en forma de ecuación diferencial de segundo orden y expreso la ecuación homogénea asociada:

$$\ddot{e} + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\dot{e} - (\frac{\pi\delta}{\lambda})e = -(\frac{\pi\delta}{\lambda})\bar{e}$$

$$\ddot{e} + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\dot{e} - (\frac{\pi\delta}{\lambda})e = 0$$

IV- Expreso la ecuación característica y calculo las raíces:

$$r^2 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})r - (\frac{\pi\delta}{\lambda}) = 0$$

$$r_{1,2} = -(\frac{\pi}{2})(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \pm \{[(\frac{\pi}{2})(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})]^2 + (\frac{\pi\delta}{\lambda})\}^{1/2}$$

V- Ya que la sucesión de los signos de los coeficientes es ++-, van a existir dos raíces reales, una positiva y una negativa. Esto nos va a decir que se trata de un punto de ensilladura con una rama convergente (la de la raíz negativa) y una divergente (la de la raíz positiva).

$$r_1 = -(\frac{\pi}{2})(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) + \{[(\frac{\pi}{2})(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})]^2 + (\frac{\pi\delta}{\lambda})\}^{1/2} > 0$$

$$r_2 = -(\frac{\pi}{2})(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) - \{[(\frac{\pi}{2})(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})]^2 + (\frac{\pi\delta}{\lambda})\}^{1/2} < 0$$

VI- La solución homogénea asociada a e(t):

$$e_h(t) = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t)$$

VII- Propongo una solución complementaria y la aplico a la ecuación diferencial:

$$e_p(t) = A \quad - \left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)A = -\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)\bar{e} \quad \text{siendo } \in \Re$$

vemos que \bar{e} es solución complementaria.

VIII- Por lo antedicho y con $\dot{e} = \frac{(p-\bar{p})}{\lambda}$, obtenemos $p(t)$:

$$p(t) = C_1 r_1 \lambda \exp^{(r_1 t)} + C_2 r_2 \lambda \exp^{(r_2 t)} + \bar{p}$$

y

$$e(t) = C_1 \exp^{(r_1 t)} + C_2 \exp^{(r_2 t)} + \bar{e}$$

Esta es la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales, como la suma entre y_t^h y y_t^c .

Si consideramos $e(0) = e_0$ y $p(0) = p_0$, podemos obtener C_1 y C_2

$$C_1 = \left[1 - \frac{r_1 \lambda}{(r_2 - r_1)}\right](e_0 - \bar{e}) - \frac{(p_0 - \bar{p})}{\lambda(r_2 - r_1)}$$

$$C_2 = \frac{(p_0 - \bar{p})}{\lambda(r_2 - r_1)} - \left[\frac{r_1 \lambda}{(r_2 - r_1)}\right](e_0 - \bar{e})$$

IX- Reemplazamos lo anterior en la soluciones generales y obtenemos para estas condiciones iniciales la solución del sistema.

Estabilidad

Consideramos la parte del sistema de ecuaciones que nos da el ajuste dinámico, es decir, la parte homogénea del mismo. Para calcular la estabilidad del sistema aplicamos las condiciones de estabilidad para sistemas de ecuaciones de la forma $X'(t) = A_{n \times n} X(t)$.

I- la traza de A tiene que ser negativa:

$$Tr(A) = Tr \begin{pmatrix} -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) & \pi\delta \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} = -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) < 0$$

cumple esta condición necesaria.

II- el determinante de A debe tener el mismo signo que $(-1)^n$.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) & \pi\delta \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = \frac{-\pi\delta}{\lambda} < 0$$

$$\text{sg Det}(A) \neq (-1)^2 > 0$$

no cumple esta segunda condición necesaria de estabilidad, por lo tanto, el sistema no es estable.

Como vimos en la resolución del modelo, tenemos una raíz positiva y otra negativa, con lo cual sabemos que se trata de un punto de ensilladura, con una rama convergente (< 0) y otra divergente (> 0)

Diagrama de Fase

Proseguiremos ahora a encontrar las rectas $\dot{p} = 0$ y $\dot{e} = 0$, con el propósito de esquematizar el diagrama de fase del modelo. Entonces, igualamos las dos ecuaciones que rigen nuestro modelo a cero, es decir,

$$(13) \quad \dot{p} = -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})(p - \bar{p}) + \pi\delta(e - \bar{e}) = 0$$

$$(7) \quad \dot{e} = \frac{(p - \bar{p})}{\lambda} = 0$$

Despejando obtenemos, la recta $\dot{p} = 0$:

$$p = (\frac{\delta\lambda}{\delta\lambda + \sigma})e + \bar{p} - (\frac{\delta\lambda}{\delta\lambda + \sigma})\bar{e}$$

Podemos observar que se trata de un polinomio de primer orden, una línea recta como es sabido puede expresarse $y = mx + b$, donde "m" es la pendiente y "b" es la ordenada al origen, por lo tanto vemos que $m = \left(\frac{\delta\lambda}{\delta\lambda + \sigma}\right)$ y $b = \bar{p} - \left(\frac{\delta\lambda}{\delta\lambda + \sigma}\right)\bar{e}$.

Despejando también obtenemos, la recta $\dot{e} = 0$:

$$p = \bar{p}$$

Vemos que se trata de una recta paralela al eje de abscisas «e» con ordenada \bar{p} .

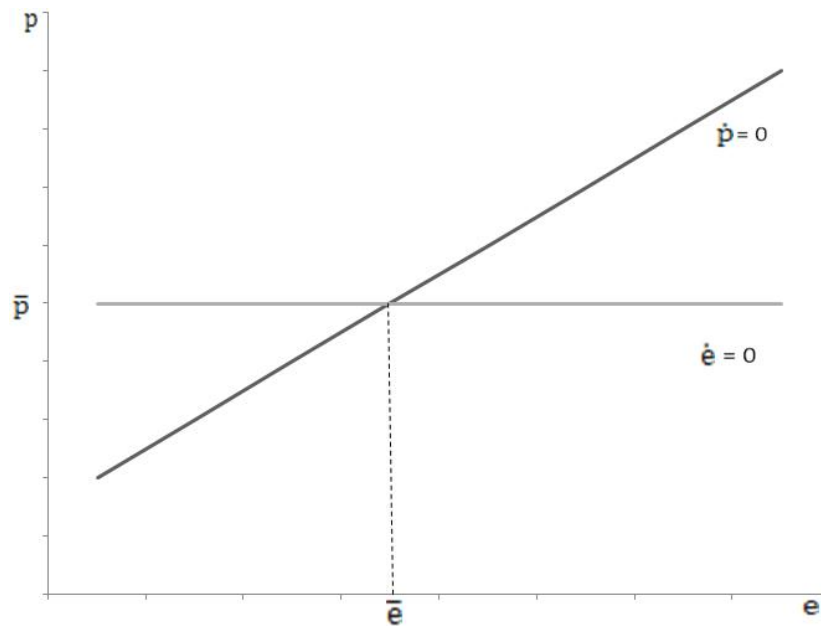


Figura 5.1: Diagrama de fase.

Es fácil de distinguir que la recta $\dot{p} = 0$ tiene pendiente positiva y la recta $\dot{e} = 0$ no tiene pendiente. Con esto podemos armar las dos rectas de demarcación del diagrama de fase correspondiente a nuestro modelo. En el cual se relaciona el tipo de cambio y la variación de los precios.

El tipo de cambio en el largo plazo provoca que el precio actual y el de largo plazo sean iguales debido a las expectativas racionales y a la perfecta movilidad de los capitales. La dinámica de los precios en el largo plazo es positiva

ya que ante un cambio positivo del tipo de cambio en esta economía pequeña y abierta se traduce en crecimiento económico. Si recordamos la función de demanda de los bienes domésticos, vemos que los precios reaccionan de manera positiva (por su pendiente).

Se asume que el nivel de precios de los bienes domésticos reacciona de manera más lenta que el tipo de cambio. Los precios responden gradualmente a los excesos de demanda u oferta, sin embargo, existe un equilibrio permanente del mercado de dinero.

Con esto es aún más fácil de poder llegar a relacionar la matemática del modelo con una leve inducción económica. Al graficar las dos curvas en el plano de fase, con los valores de las variables endógenas al modelo en sus ejes, notaremos que nos queda nuestro plano dividido en 4 regiones.

Sentido de las Regiones

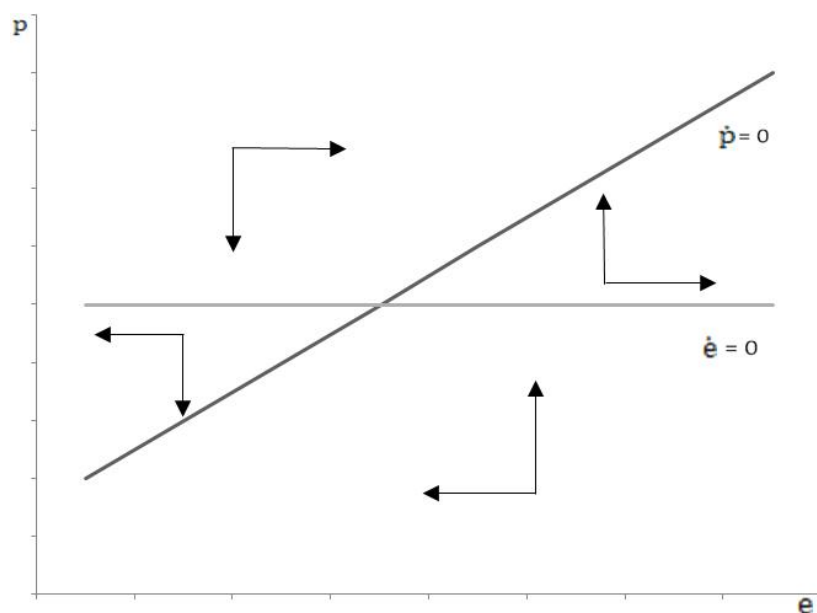


Figura 5.2: Sentido de las regiones.

Buscamos en este caso el sentido de los flujos en las 4 regiones que nos han quedado luego de hallar las rectas $\dot{p} = 0$ y $\dot{e} = 0$. Una forma es introduciendo valores con el propósito de conocer el signo de \dot{p} y \dot{e} . Otras veces un tanto más práctico es derivar, es decir, realizar las derivadas parciales de cada una de las ecuaciones del sistema respecto de su variable,

$$\frac{d\dot{p}}{dp} = -\pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\dot{e}}{de} = 0$$

Con este método encontramos que la relaciones es negativa de \dot{p} con respecto a p , con lo cual si estamos en un punto por encima de la recta $\dot{p} = 0$ la dinámica del modelo nos dirá que este punto se moverá con una tendencia inversa. Si estamos por arriba de la recta $\dot{p} = 0$ nos moveremos hacia abajo, y si estamos por abajo de la recta $\dot{p} = 0$ nos moveremos hacia arriba.

Aunque este método nada nos dice de la relación entre la tasa esperada y la tasa actual de depreciación del tipo de cambio, ya que nos da 0, o mejor

dicho, nos dice que *no existe relación* entre la tasa del tipo de cambio y el tipo de cambio actual en cuanto a su variación a través del tiempo.

Esto podría justificarse con inducción económica, aunque no es necesario, ya que introduciendo valores podemos descubrir su dinámica en el tiempo. Si $\bar{p} > p$, $\dot{e} < 0$; y si $\bar{p} < p$, $\dot{e} > 0$. Si estamos por arriba de la recta $\dot{e} = 0$ vamos a tener una relación directa, es decir, nos moveremos hacia la derecha y si estamos por abajo de $\dot{e} = 0$ nos moveremos a la izquierda.

Por lo tanto, acabamos de descubrir analíticamente que existen dos regiones de convergencia y dos de divergencia, tal cual habíamos descubierto anteriormente, se trata de un sistema inestable. Además en la resolución de modelo tenemos una raíz negativa y otra positiva por lo tanto es un punto de ensilladura, con una rama estable y otra inestable. La rama estable del modelo es la que brindara el único camino que conduce al equilibrio de largo plazo.

Autovectores del Modelo

Para realizar esta búsqueda tendremos que hacer uso nuevamente del sistema de ecuaciones formado por las dos ecuaciones que rigen la dinámica del modelo, sin embargo esta vez lo reescribiremos de la siguiente manera:

$$\dot{X} = Ax + b$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) & \pi\delta \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) & -\pi\delta \\ \frac{-1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{e} \end{pmatrix}$$

La ecuación característica esta dada por el siguiente determinante $|A - \mu I|$ igualado a 0:

$$\begin{vmatrix} -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) - \mu & \pi\delta \\ \frac{1}{\lambda} & 0 - \mu \end{vmatrix} = 0$$
$$\mu^2 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\mu - \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$$

Como vemos esta ecuación característica es muy parecida a la que obtuvimos en la sección 3.IV. Por lo tanto, las raíces serán las mismas, una raíz es positiva y otra negativa. Lo que debemos hacer ahora es reemplazar estas raíces en $(A - \mu I)x = \theta$,

- Para $\mu_1 > 0$ tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) - \mu_1 & \pi\delta \\ \frac{1}{\lambda} & 0 - \mu_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\lambda} - \mu_1 e = 0 \Rightarrow e = \frac{p}{\lambda \mu_1}$$

$$\Rightarrow V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \underbrace{\frac{1}{\lambda \mu_1}}_{>0} \end{pmatrix}$$

- Para $\mu_2 < 0$ tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} -\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) - \mu_2 & \pi\delta \\ \frac{1}{\lambda} & 0 - \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{\lambda} - \mu_2 e = 0 \Rightarrow e = \frac{p}{\lambda \mu_2}$$

$$\Rightarrow V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \underbrace{\frac{1}{\lambda \mu_2}}_{<0} \end{pmatrix}$$

Una vez que obtenemos los autovectores del modelo podemos dibujar su trazado en el gráfico. Partiendo del punto de equilibrio, donde $\dot{p} = \dot{e} = 0$:

- Para $\mu_1 > 0$, nos movemos $\frac{1}{\lambda \mu_1}$ hacia la derecha, ya que e se encuentra en el eje de abscisas y 1 hacia arriba, ya que p se encuentra en el eje de ordenadas.
- Para $\mu_2 < 0$, nos movemos $\frac{1}{\lambda \mu_2}$ hacia la izquierda y 1 hacia arriba.

En el gráfico la traza del autovector μ_1 está representada por la recta de la rama inestable RI, y la traza del autovector μ_2 está representada por la recta de la rama estable RE.

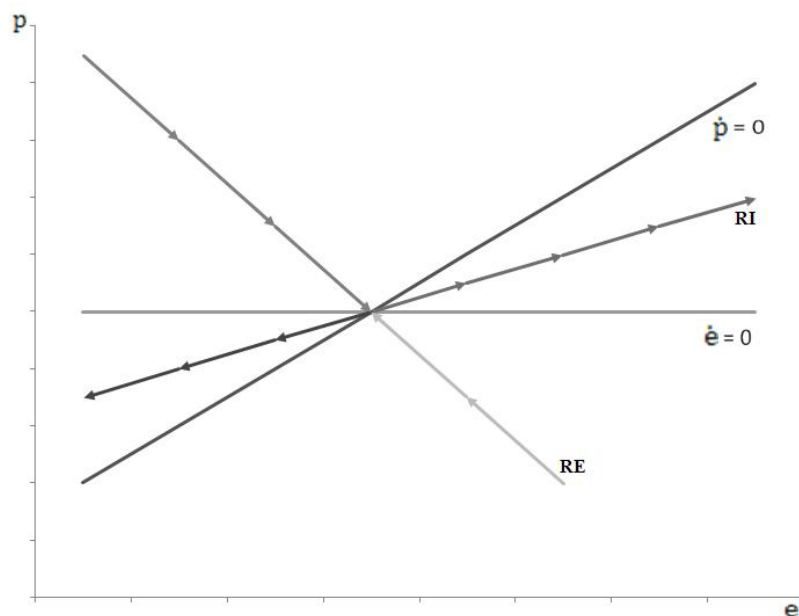


Figura 5.3: Estabilidad del modelo.

Interpretación Económica

En esta sección desarrollaremos una interpretación de la sobre-reacción del tipo de cambio ante un shock monetario. O sea, analizaremos que sucede con nuestro modelo cuando aumenta la magnitud de M .

Suponemos que el modelo se encuentra en un equilibrio inicial, es decir $\dot{p} = 0$ y $\dot{e} = 0$. Un aumento en la oferta monetaria (M) generará una perturbación en el equilibrio inicial ($\dot{p} \neq 0$, $\dot{e} \neq 0$). Ante este shock el tipo de cambio reacciona instantáneamente, dado que hay expectativas racionales, para asegurar la paridad de interés descubierta ($i = i_f$). El nivel de precios no ajusta de manera instantánea, sino que responde gradualmente.

Debido a que las variables endógenas de nuestro modelo (e y p) ajustan a velocidades distintas, observamos que el tipo de cambio sobre-reacciona ante el shock. Esto es una sobre-depreciación de la moneda local.

Ante este nuevo nivel de tipo de cambio, la tasa de variación del nivel de precios es positiva, $\dot{p} > 0$. En otras palabras, el nivel de precios tiende a subir. Como nos encontramos en un nivel de precios menor al nivel de precios del

equilibrio final, $p < \bar{p}$, según las ecuaciones de nuestro modelo, $\dot{e} < 0$. El tipo de cambio tiende a apreciarse gradualmente, a partir del aumento del nivel de precios, contrarrestando en parte la sobre depreciación inicial del mismo. El *overshooting* ocurre cuando el tipo de cambio sobre reacciona posándose sobre la rama estable, que es una característica de los modelos dinámicos de expectativas racionales, y siguiendo la dirección de ésta hacia el nuevo valor de equilibrio de largo plazo.

Bibliografía.

- Expectations and Exchange Rate Dynamics, Rudiger Dornbusch(1976).
- International Finance and Open-Economy Macro-economics, Giancarlo Gandolfo.
- Modelo de Overshooting Cambiario (de Dornbusch), David Golden (2005).
- Capital Movility and Stabilization Policy under Fixed and Flexible Exchange Rates, Robert Mundell(1968).

Capítulo 6

Modelo IS-LM: una versión dinámica en tiempo continuo.

Sabrina Dervich.¹

¹Agradezco los comentarios y la ayuda de todos los integrantes de la cátedra García Fronti de Matemática para Economistas, tanto ayudantes como profesores. Además, agradezco a Federico Pastrana, docente de Macroeconomía I, por las sugerencias bibliográficas.

Este modelo relaciona la tasa de interés real (r) de una economía con el nivel de producto (Y) de la misma a través de la interacción entre el mercado de bienes (IS: Investment-Savings relation) y el mercado de dinero (LM: Liquidity preference-Money relation).

Introducción

El modelo IS-LM es de gran importancia tanto en el ámbito académico, como en el del estudio de la coyuntura, ya que relaciona dos de los mercados principales para el análisis macroeconómico.

El modelo en sí fue creado por J. Hicks (Hicks, 1937), a partir de su propia interpretación de la Teoría General de Keynes (1936), como una contribución a la teoría del ciclo económico. En su libro de 1950, Hicks utiliza las ecuaciones en diferencias para establecer relaciones entre la inversión y el ahorro por un lado, con las preferencias por liquidez por el otro. A lo largo del tiempo, este modelo fue sufriendo modificaciones a partir de los avances matemáticos que se fueron descubriendo.

La importancia de este modelo fue clave para el análisis de ciertos comportamientos de las variables macroeconómicas. Blanchard (Blanchard-Pérez Enri, 2000) lo utiliza para analizar y comprender los efectos de políticas públicas monetarias y fiscales sobre la tasa de interés y sobre el producto de un país. Analiza, por ejemplo: los ajustes de la tasa de interés de Estados Unidos de 1993 a 1995 .

Creo que es importante incorporar un estudio más avanzado de este modelo que se incluye en los programas de estudio de Macroeconomía I. Su intención es relacionar el mercado real (bienes) con la preferencia de liquidez del mercado de dinero. Su principal aplicación es ante situaciones extremas, como ser un contexto de trampa de liquidez similar al de la crisis del '30. Además, es interesante analizar la diferencia entre la velocidad de ajuste de uno y otro mercado, para poder ver los sesgos en las variables endógenas ante un shock exógeno.

En los cursos de Macro I, se ve el modelo sin tener en cuenta el tiempo, ya que no disponemos de las herramientas matemáticas necesarias para un análisis más riguroso. Propongo que hagamos un recorrido por las principales conclusiones del modelo, incluyendo al tiempo como una variable continua, por medio de la aplicación de las ecuaciones diferenciales. Además, este trabajo se diferencia del original, y de otros trabajos posteriores (al original), por la inclusión de variables exógenas en forma lineal, que pueden ser motivos de shocks externos comunes en la economía real, como ser la política fiscal o el gasto público.

Mediante la resolución matemática del modelo podremos fundamentar las principales conclusiones intuitivas que se proponen, incursionando tanto en

conceptos matemáticos, como en conceptos económicos.

Descripción del modelo

El mercado de bienes: Más allá de la relación inicialmente establecida por J. R. Hicks donde se igualan el ahorro a la inversión (agregados) podemos determinar el funcionamiento de este mercado de la siguiente forma:

$Y = C(Yd) + Y(Y, r) + G$ (demanda de bienes o planes de consumo).

La demanda de bienes esta compuesta por el consumo (privado-C) que depende del ingreso disponible de los individuos de la economía; por la inversión, I , que es función del nivel de producto y de la tasa de interés; y por el gasto publico (G), que es considerado exógeno.

En equilibrio:

$$Y \equiv Z$$

La oferta de bienes es idénticamente igual a los planes de consumo del conjunto de la economía, esto implica que el mercado en equilibrio se vacía en sentido clásico.

Expresando las funciones implícitas de este mercado en forma lineal, con términos constantes resumiendo las variables exógenas, y parámetros lineales y positivos que acompañan el movimiento de las variables endógenas. De esta forma se obtiene una forma simplificada del modelo:

$$Yd = Y - T - tY$$

$$C(Yd) = C + cYd$$

$$I(Y, r) = I + aY - br$$

T: impuesto de suma fija

t: tasa impositiva (impuesto directo)

C: consumo autónomo o de subsistencia

c: propensión marginal a consumir

a: sustentabilidad de los planes de inversión respecto del nivel de producto (proporción del producto que se invierte)

b: sustentabilidad de los planes de inversión ante un cambio en la tasa de interés (ahorro vs. desahorro - racionalidad de los inversores)

$$Y = C + c(Y - T - tY) + I + aY - br + G = A + Y[c(1 - t) + a] - br$$

Donde $A = C - c.T + I + G$

Para modelar este mercado en forma dinámica supongo que el nivel de producto de la economía ajusta en el tiempo en función de los excesos de demanda y oferta:

$$\dot{Y} = fn(Y - Z) = fm(Demanda - Oferta)$$

- Si $Y \geq Z$: hay exceso de demanda de bienes (EDB), por lo tanto la producción va a tender a aumentar.

$$\dot{Y} \geq 0.$$

- Si $Y \leq Z$: hay exceso de oferta de bienes (EOB), por lo tanto la producción va a ajustar negativamente.

$$\dot{Y} < 0.$$

- Cuando $Y = Z$: el mercado está en equilibrio, el nivel de producto no se mueve, está en reposo.

$$\dot{Y} = 0.$$

Relación IS

$$\dot{Y} = \alpha \{A - Y[1 - c(1 - t) - a] - br\} \quad (6.1)$$

α : representa la velocidad de ajuste del nivel de producción.

El mercado de dinero:

Este mercado establece la relación entre la compra y venta de dinero y bonos en la economía. Lo que pretende es modelar las decisiones de los individuos a la hora de comprar bonos o tener el dinero (preferencias de liquidez). L_s : oferta de dinero, exógenamente controlada por el Banco Central. $L_d = L(Y, r)$: demanda de dinero es una función del nivel de producto de la economía y de la tasa de interés real. El equilibrio, el mercado se vacía: $L_d = L_s$

Si linealizo la demanda de dinero para simplificar el análisis queda:

$$L_d = kY - lr = L_s$$

k: sensibilidad de la demanda de dinero por motivos transaccionales

l: sensibilidad de la demanda de dinero por motivos especulativos

Despejando los términos, la relación (Y,r) queda: $r = (kY - L_s) / l$

Expresando la ecuación en forma dinámica, según los excesos de demanda y oferta de dinero, obtenemos la siguiente forma:

$$\dot{r} = fn(L_d - L_s) = fm(Demanda - Oferta)$$

- Si $L_d \geq L_s$: hay exceso de demanda de dinero, idénticamente igual a un exceso de oferta de bonos (EDD o EOBs) que tracciona al alza la tasa de interés. $\dot{r} \geq 0$.
- Si $L_d < L_s$: hay exceso de oferta de dinero, idénticamente igual a un exceso de demanda de bonos (EOD o EDBs) que produce una disminución de la tasa de interés en el tiempo. $\dot{r} < 0$.
- Cuando $L_d = L_s$: el mercado está en reposo. $\dot{r} = 0$.

Relación LM

$$\dot{r} = \beta [kY - lr - L_s] \quad (6.2)$$

β : es la velocidad de ajuste de la tasa de interés real.

El modelo IS-LM:

Este modelo establece una relación entre la tasa de interés y el nivel de producto a través del funcionamiento simultáneo del mercado de dinero/bonos y del mercado de bienes.

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha \cdot \{A - Y [1 - c(1 - t) - a] - br\} \\ \dot{r} = \beta [kY - lr - L_s] \end{cases} \quad (6.3)$$

Desarrollo del Modelo

Resolución del sistema de ecuaciones

Resuelvo el sistema de ecuaciones diferenciales (3) por el método de matriz de operadores.

$$\begin{bmatrix} (D + \alpha\varphi) & \alpha b \\ -\beta k & (D + \beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha A \\ -\beta L_s \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\varphi = 1 - c(1 - t) - a$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales no es homogéneo, por lo tanto para resolverlo tendríamos que separarlo en dos: la parte homogénea y la complementaria.

Primero resolvemos la parte homogénea, averiguando los posibles valores de D cuando el sistema esta igualado a cero. Es decir, $G(D)X = 0$.

Para ello necesitaríamos resolver el polinomio característico. Este surge a partir de la igualación a cero del determinante de la matriz de operadores del sistema.

$$\text{Det}[G(D)] = (D + \alpha\varphi)(D + \beta l) + \alpha b\beta k = 0$$

Igualamos el determinante a cero, ya que de esta forma, el sistema seria compatible determinado. Cuando un sistema es compatible determinado, el numero de soluciones linealmente independientes que surgen de su resolución igualan al grado de las ecuaciones características.

Sacamos las raíces de la ecuación cuadrática que queda:

$$D^1; D^2 = \left[-(\alpha\varphi + \beta l) \pm \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2$$

Estas raíces, dependiendo del valor de los parámetros, pueden ser reales: iguales o diferentes, o complejas conjugadas.

En este trabajo se analizará el caso de raíces Reales Diferentes:

$$(\alpha\varphi + \beta l)^2 > 4\alpha\beta(l\varphi + bk); D^1 \neq D^2$$

$$D^1 = \left[-(\alpha\varphi + \beta l) + \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2$$

$$D^2 = \left[-(\alpha\varphi + \beta l) - \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2$$

Para sacar la solución homogénea, supongo que esta va a tener la forma: $\ell^{D^1} G^*(d_i)$ donde $i=1,2$

$G^*(d_i)$ es la adjunta de la matriz $G(D)$ reemplazando D por D^i

$$G(D^1) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Con:

$$a = \left[-\beta l + \alpha\varphi + \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2$$

$$b = \alpha b$$

$$c = -\beta k$$

$$d = \left[-\alpha\varphi + \beta l + \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2$$

Para sacar las constantes de multiplicación, es necesario averiguar una columna de la matriz adjunta de $G(D^1)$ que sea combinación lineal de las demás columnas. Para ello calculamos la adjunta de la segunda fila, obteniendo un vector columna:

$$G_{k_1}^{D^1} = \begin{bmatrix} -\alpha b \\ \left[-\beta l + \alpha\varphi + \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2 \end{bmatrix} = k_1$$

Repito el proceso para la segunda raíz:

$$G(D^2) = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Con:

$$e = \left[-\beta l + \alpha\varphi - \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2$$

$$f = \alpha b$$

$$g = -\beta k$$

$$h = \left[-\alpha\varphi - \beta l + \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \right] / 2$$

$$G_{k_2}^{D^2} = \left[\left[\begin{array}{c} -\alpha b \\ -\beta l + \alpha\varphi - \sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)} \end{array} \right] / 2 \right] = k_2.$$

Entonces, la solución homogénea va a tener la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = C_1 k_1 \ell^{D^1 t} + C_2 k_2 \ell^{D^2 t} \quad (6.5)$$

Para la solución complementaria, que vendría a ser un polinomio de grado cero, propongo un vector B tal que $G(D) \cdot B = c$, siendo esta una constante. Por lo tanto, para averiguar el valor de c: $B = G(0)^{-1} \cdot c$.

$$[G(0)] = \begin{bmatrix} \alpha\varphi & \alpha b \\ -\beta k & \beta l \end{bmatrix}$$

$$Adj[G(0)] = \begin{bmatrix} \beta l & -\alpha b \\ \beta k & \alpha\varphi \end{bmatrix}$$

$$det[G(0)] = \alpha\varphi\beta l + \alpha b\beta k$$

$$G(0)^{-1} = 1/[det(0) \cdot Adj(0)]$$

$$G(0)^{-1} = \begin{bmatrix} l/[\alpha(\varphi l + bk)] & -b/[\beta(\varphi l + bk)] \\ k/[\alpha(\varphi l + bk)] & \varphi/[\beta(\varphi l + bk)] \end{bmatrix} = W$$

$$B = W \cdot c = \begin{bmatrix} lA/(\varphi l + bk) + L_s b/(\varphi l + bk) \\ kA/(\varphi l + bk) - L_s \varphi/(\varphi l + bk) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^* \\ r^* \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

La forma de la solución general estará dada por la suma de la parte homogénea con la complementaria, es decir, sumamos las ecuaciones (4) y (5):

$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = C_1 \cdot k_1 \cdot \ell^{D^1 \cdot t} + C_2 \cdot k_2 \cdot \ell^{D^2 \cdot t} + B$$

Para averiguar las constantes de integración, C_1 y C_2 , saco los valores de las variables en el momento cero y lo igualo al valor inicial dado, esto determina la solución particular:

$$Y(0) = Y_0$$

$$r(0) = r_0$$

$$C_1 = \frac{(r_0 - r^*)}{\sqrt{(\alpha\varphi + bl)^2 - \alpha\beta(\varphi l + bk)}} + \frac{(Y_0 - Y^*)(-\beta l + \alpha\varphi - \sqrt{(\alpha\varphi + bl)^2 - \alpha\beta(\varphi l + bk)})}{2\alpha b \sqrt{(\alpha\varphi + bl)^2 - \alpha\beta(\varphi l + bk)}}$$

$$C_2 = \frac{-(r_0 - r^*)}{\sqrt{(\alpha\varphi + bl)^2 - \alpha\beta(\varphi l + bk)}} - \frac{(Y_0 - Y^*)(-\beta l + \alpha\varphi + \sqrt{(\alpha\varphi + bl)^2 - \alpha\beta(\varphi l + bk)})}{2\alpha b \sqrt{(\alpha\varphi + bl)^2 - \alpha\beta(\varphi l + bk)}}$$

Equilibrio de largo plazo

El equilibrio de largo plazo esta dado por aquel valor de las variables que no sufre modificaciones a través del tiempo. Para averiguarlo, igualo el sistema de ecuaciones diferenciales de (3) a cero, así obtengo los valores de Y y r que no varía en el tiempo:

$$\dot{Y} = \alpha \{A - Y[1 - c(1 - t) - a] - bY\} = 0$$

$$\dot{r} = \beta [kY - lr - L_s] = 0$$

Esto es un sistema de ecuaciones lineal de 2 ecuaciones con 2 variables (Y, r) que se puede resolver mediante cualquier método conocido de algebra. Operando quedaría:

$$r^* = \frac{(kA - L_s\varphi)}{l\varphi + bk}$$

$$Y^* = \frac{(lA + L_sb)}{l\varphi + bk}$$

Estos valores coinciden con los de la constante de la solución complementaria, por lo que para el análisis anterior de la solución particular ya fueron reemplazados dichos valores para simplificar la ecuación resultante.

Estática Comparada

En esta sección se analizará cómo cambiará el valor del equilibrio de una variable endógena ante un cambio (infinitesimal) en el valor de alguna de las variables endógenas o parámetros del modelo.

El equilibrio del modelo está dado por:

$$r^* = \frac{(kA - L_s\varphi)}{l\varphi + bk}$$

$$Y^* = \frac{(lA + L_sb)}{l\varphi + bk}$$

Mediante el uso del diferencial parcial se determina cómo afecta a las variables endógenas en equilibrio ante un cambio infinitesimal en alguna de las variables exógenas o parámetros, se analiza el signo de dichos diferenciales y se explican las implicancias económicas del resultado:

Recordatorio de símbolos:

A: $A = C - cT + I + G \geq 0$: está conformado por el conjunto de variable exógenas del mercado de bienes.

φ : $\varphi = 1 - c(1 - t) - a \in (0, 1)$: es el multiplicador keynesiano.

k: es la sensibilidad de la demanda transaccional de dinero. $k \geq 0$.

l: es la sensibilidad de la demanda especulativa de dinero. $l \geq 0$.

b: es el parámetro de racionalidad de los inversores, muestra cómo se adaptan los planes de inversión ante un cambio en la tasa de interés. $b \in (0, 1)$.

$\frac{\partial Y^*}{\partial A} = \frac{l}{(l\varphi+bk)} > 0$: Ante un cambio positivo en el conjunto de variables exógenas del mercado de bienes, el nivel de producto de equilibrio ajusta positivamente.

$\frac{\partial Y^*}{\partial L_s} = \frac{b}{(l\varphi+bk)} > 0$: Si aumenta la oferta monetaria, el producto de equilibrio también aumentará.

$\frac{\partial r^*}{\partial A} = \frac{k}{(l\varphi+bk)} > 0$: Ante una variación de A, la tasa de interés de equilibrio varía en el mismo sentido.

$\frac{\partial r^*}{\partial L_s} = \frac{-l}{(l\varphi+bk)} < 0$: Si varía la oferta de dinero, la tasa de interés de equilibrio se cambiará en el sentido contrario.

$$\frac{\partial Y^*}{\partial k} = \frac{-b(lA+L_s b)}{(l\varphi+bk)^2} < 0$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial l} = \frac{Abk}{(l\varphi+bk)^2} > 0$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \varphi} = \frac{-l(lA+L_s b)}{(l\varphi+bk)^2} < 0$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial b} = \frac{L_s l \varphi}{(l\varphi+bk)^2} > 0$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial k} = \frac{Al\varphi}{(l\varphi+bk)^2} > 0$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial l} = \frac{-L_s(2l\varphi+bk)}{(l\varphi+bk)^2} < 0$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial \varphi} = \frac{-l(ka-L_s l)}{(l\varphi+bk)^2} \text{ No podemos determinar el signo}$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial b} = \frac{-k(ka-L_s l)}{(l\varphi+bk)^2} \text{ No podemos determinar el signo}$$

Diagrama de fase y análisis de estabilidad

En esta sección se hará un análisis grafico-cuantitativo del modelo

El gráfico

Primero buscamos las trayectorias de solución, de donde surgirán dos rectas que representen la relación grafica entre los dos mercados en cuestión. Estas rectas se obtienen igualando a cero las derivadas, tal como se hizo en la sección anterior para encontrar el equilibrio de largo plazo.

Para poder graficar, se tomará a la tasa de interés como la variable dependiente, por lo tanto, las ecuaciones quedarán despejadas respecto a dicha variable. Se obtendrá una ecuación a partir del mercado de bienes (IS) y otra a partir del mercado de dinero (LM).

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial Y}_{\dot{Y}=0} &\longrightarrow r_{is} = -\frac{\varphi}{b}Y + \frac{A}{b} \\ \frac{\partial r}{\partial Y}_{\dot{r}=0} &\longrightarrow r_{lm} = \frac{k}{l}Y - \frac{L_s}{l}\end{aligned}$$

Comportamiento de los mercados

La IS representa el comportamiento del mercado de bienes. Tiene una pendiente negativa, ya que este mercado ajusta por medio de una relación inversa entre la tasa de interés y el nivel de producto.

Tiene la siguiente dirección de movimiento (pertinente para aquellos valores fuera del equilibrio):

$$\frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} = -\alpha\varphi \leq 0$$

Esto implica que a medida que se incrementa uniformemente el nivel de producto (hay un movimiento de izquierda a derecha), \dot{Y} , decrece uniformemente. Este dato es muy importante para la confección del diagrama de fase dado que indica el conjunto de flechas direccionales.

La LM muestra el comportamiento del mercado de bonos y dinero. Tiene una pendiente positiva. La dirección de movimiento está dada por:

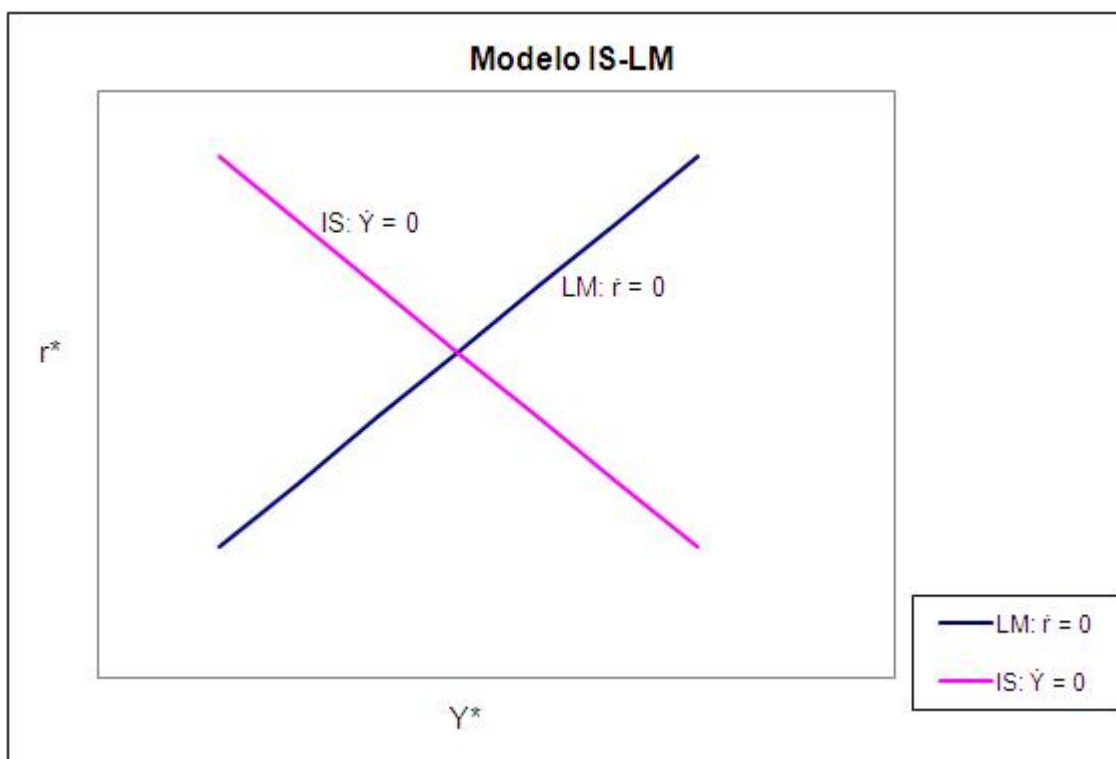


Figura 6.1: Modelo IS-LM.

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = -\beta l \leq 0$$

Esto indica que a medida que la tasa de interés aumenta (se mueve de abajo hacia arriba), \dot{r} disminuye uniformemente.

El equilibrio intertemporal se encuentra en aquel punto donde las dos rectas de demarcación se cruzan, y determina los valores de r e Y estacionarios.

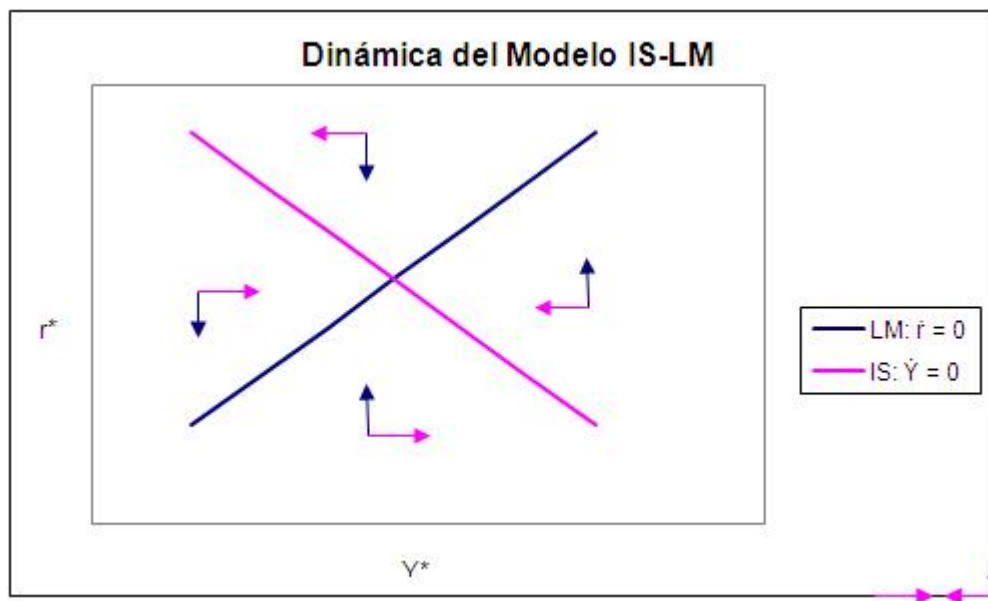


Figura 6.2: Dinámica del modelo IS-LM.

Estabilidad del equilibrio

Por último se analizará si el equilibrio intertemporal (Y^*, r^*) es dinámicamente estable, o sea, si $[Y(0), r(0)] \rightarrow (Y^*, r^*)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para ello es pertinente el análisis de las raíces características de la parte homogénea, ya que la expresión exponencial de la solución es lo que nos va a determinar la convergencia hacia el punto de equilibrio.

Para que el equilibrio sea dinámicamente estable, ambas raíces deben ser negativas, tal que, $e^{D^{1,2}t} \rightarrow 0$.

En letras, esto implicaría que:

$$\frac{(\alpha\varphi + \beta l)}{2} \geq \frac{\sqrt{(\alpha\varphi + \beta l)^2 - 4\alpha\beta(l\varphi + bk)}}{2}$$

Esto concuerda con las condiciones iniciales impuestas sobre los parámetros. Por lo tanto, se puede concluir que el IS-LM es un modelo dinámicamente estable con respecto al tiempo tomado como variable continua.

Bibliografía.

- Métodos fundamentales de economía matemática de Alpha C. Chaing. Mc Graw Hill, México, 2006.
- Matemática para economistas con Excel y Matlab de Alicia Bernardello, María J. Bianco, otros. Omicron System, Buenos Aires, 2004.
- Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica de Giancarlo Gandolfo. Editoriales Tecno, Madrid, 1976.
- Advanced Macroeconomics de David Romer. Mc Graw Hill, Boston, 2001.
- A contribution to the theory of the trade cycle de John R. Hicks. London University Press, Clarendon Press, Londres, 1950.
- Macroeconomía: Teoría y política económica con aplicaciones a América Latina de Oliver Blanchard, D. Pérez Enri. Prentice Hall Iberia, Buenos Aires, 2000.
- Lectures on macroeconomics de Oliver Blanchard, Stanley Fisher. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993.
- Macroeconomía avanzada: Modelos IS-LM dinámico para una economía cerrada de Richard Roca. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, 2005.

Capítulo 7

Programación Dinámica.

Blas Rodriguez.¹

¹Estos apuntes han sido elaborados siguiendo los lineamientos Recursive Macroeconomic Theory (capítulo 3) Ljungqvist L. y Sargent T., 2004 MIT PRESS.

En el presente capítulo se realiza una introducción a algunas de las ideas básicas sobre Programación Dinámica presentando un problema intertemporal que puede ser resuelto a través de la Ecuación de Bellman y se detalla un método de resolución del mismo.

Introducción

La Optimización Dinámica estudia, como su nombre lo indica, la optimización de sistemas dinámicos, esto es, sistemas que evolucionan en el tiempo. Entonces, dado un sistema que varía en el tiempo, se intenta controlarlo, dentro de un horizonte intertemporal, de manera óptima y de acuerdo a un objetivo previamente fijado. La Ecuación de Bellman es una relación recursiva que traduce matemáticamente el principio básico de la Programación Dinámica llamado Principio de Optimalidad de Bellman y se enuncia como sigue:

“Dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es, a su vez, óptima.”

Diferencias entre Optimización Estática y Dinámica

En la Optimización Estática, el problema consiste en determinar el conjunto de valores que toman las variables de tal manera que optimicen una función objetivo en un determinado momento del tiempo. Sin embargo, en la Optimización Dinámica, lo que se resuelve es una sucesión de problemas dentro de un horizonte intertemporal que puede ser finita o infinita, pero que no pueden resolverse por separado por dos razones:

- 1) La función objetivo depende de los valores de las variables en los distintos momentos del tiempo, de tal forma que el óptimo se define en términos de óptimo para todo el horizonte temporal y no en cada instante del tiempo por separado.
- 2) Las diferentes variables (de estado y de control) se hayan relacionadas en el horizonte temporal a través de la llamada ecuación de movimiento. La misma describe la evolución de la variable de estado en la etapa siguiente y depende de los valores de las variables de control y de estado en el período actual.

Problema secuencial

Sea $\beta \in (0; 1)$ un factor de descuento. Se busca encontrar una secuencia infinita de controles $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ que maximice:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t; u_t) \quad (1)$$

s.a: $x_{t+1} = g(x_t; u_t)$ con x_0 dado
Se supone $r(x_t; u_t)$ una función cóncava.

El conjunto $\{(x_{t+1}; x_t) : x_{t+1} \leq g(x_t; u_t), u_t \in \mathfrak{R}\}$ es convexo y compacto.

La Programación Dinámica busca una función de política $h(x_t; u_t)$ (que no dependa del tiempo) que vincula la variable de control u en función de la variable de estado x .

Para encontrar la función de política h se necesita una nueva función: $V(x)$ que exprese el valor óptimo del problema original teniendo una condición inicial x_0 que comience la secuencia. En particular, se define:

$$V(x_t) = \max_{\{u_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t; u_t) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a : } & x_{t+1} = g(x_t; u_t) \\ & x_t(0) = x_0 \end{aligned}$$

El problema radica en el hecho de que no es conocida la forma funcional de $V(x)$, con lo cual no es posible determinar el valor de $V(x_0)$ hasta resolver el problema. Si conociéramos el valor de $V(x_0)$, entonces la función de política h podría

obtenerse para cada $x \in X$ del problema siguiente:

$$\underset{u}{\text{máx}} [r(x_t; u_t) + \beta V(\tilde{x})] \quad \text{s.a. : } \tilde{x} = g(x; u)$$

Con x_0 dado, y \tilde{x} denota la variable de estado en el período siguiente.

De esta manera, se intercambia el problema original que requiere resolver una infinita secuencia de controles que maximizan la expresión (1) por el problema de encontrar la función valor $V(x)$ y la función h de modo que resuelvan un continuo de problemas de maximización (2) para cada x .

Ahora se debe buscar la solución conjunta a $V(x)$ y $h(x)$. Las mismas se presentan vinculadas en la Ecuación de Bellman:

$$V(x) = \underset{u}{\text{máx}} [r(x; u) + \beta V(g(x; u))] \quad (3)$$

Así, la función h es aquella que maximiza la función $V(x)$ para cada valor de x .

Entonces se tiene que:

$$V(x) = r(x; u) + \beta V(g(x; h(x)))$$

Existen diversos métodos matemáticos para resolver la Ecuación de Bellman basados tanto en la estructura de la función r como en la de la función g . Bajo determinados supuestos (mencionados en el principio del problema) se tiene que:

- a) La ecuación funcional (3) tiene solución única y estrictamente cóncava.
- b) La solución se aproxima en el límite, cuando $\lim_{j \rightarrow \infty}$ iterando.

$$V_{j+1}(x) = \underset{u}{\text{máx}} \{r(x; u) + \beta V_j(x)\} \quad \text{s.a. : } \tilde{x} = g(x; u)$$

con $A > 0$, $\alpha \in (0; 1)$, $\beta \in (0; 1)$, x_0 dado.

Empezando desde cualquier V_0 inicial continua y acotada.

c) Existe una función de política $u_t = h(x_t)$ donde h maximiza a (3)

d) El valor límite de la función V es diferenciable:

$$V'(x) = \frac{dx}{dx} [x;h(x)] + \beta \frac{dg}{dx} [x;h(x)] V' [g(x);h(x)]$$

A continuación se presenta una estrategia de resolución que puede aplicarse para resolverse el problema.

Se supone un modelo simple de crecimiento como aquel planteado por Brock y Mirman (1972)² en el cual un planificador social decide la secuencia $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$ de forma tal que maximice:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \quad (4)$$

s.a: una ecuación de movimiento sobre el capital:

$$k_{t+1} + c_t = Ak_t^\alpha \quad (5)$$

con $A > 0$, $\alpha \in (0; 1)$, $\beta \in (0; 1)$

Donde (4) y (5) cumplen con los supuestos planteados al principio del capítulo. Entonces, se tiene que la Ecuación de Bellman del problema es la siguiente:

$$V(k) = \text{máx} \left\{ \ln c + \beta V(\tilde{k}) \right\} \quad (6)$$

con $\tilde{k} = Ak^\alpha - c$

Puede expresarse de la siguiente forma:

$$V(k) = \text{máx} \left\{ \ln (Ak^\alpha - \tilde{k}) + \beta V(\tilde{k}) \right\}$$

El método de solución³ consiste en postular la forma funcional de $V(x)$

Se plantea que: $V(x) = E + F \ln k \quad (7)$

$E, F \in \Re$ De esta forma, reemplazando (7) en (6) se obtiene:

²Brock W and L Mirman (1972) Optimal Economic Growth and Uncertainty: the Discounted Case, Journal of Economic Theory 4(3):479-513.

³Conocido como Método de Coeficientes Indeterminados.

$$V(k) = \ln(Ak^\alpha - \tilde{k}) + \beta [E + F \ln(Ak^\alpha - c)] \quad (8)$$

Por C.P.O.:

$$\frac{1}{Ak^\alpha - k} + \beta F \left(\frac{1}{Ak^\alpha - c} \right) (-1) = 0 \quad (9)$$

Note que al suponer una $V(x)$ determinada, se supone que la misma maximiza el problema intertemporal. Por ello, se toma la C.P.O como una ecuación que la misma cumple. Además desaparece la notación de "max." al ser ésta redundante.

De (9) se obtiene que: $\tilde{k} = \frac{\beta F A k^\alpha}{1 + \beta F}$

y además: $c = \frac{A k^\alpha}{1 + \beta F}$

Vea que ésta última es la función de política que llamamos h . Entonces, se llega al punto en el cual el problema consiste en resolver los valores de los coeficientes E y F de forma tal que cumplan con las ecuaciones (8) y (9), y de esta forma obtener así la función de política h , también $V(x)$ y por último si se quiere la forma funcional de la variable de estado que cumple con la ecuación de movimiento.

Se obtiene de (9) que $F = \frac{\alpha}{(1 - \alpha\beta)}$ y con esta expresión, combinando (7) y (8) se resuelve el valor de E .

Los Coeficientes se resuelven de la siguiente manera:

$$E + F \ln k = \ln\left(\frac{A k^\alpha}{1 + \beta F}\right) + \beta E + \beta F \ln\left(\frac{A k^\alpha \beta F}{1 + \beta F}\right)$$

$$E + F \ln k = \ln A - \ln(1 + \beta F) + \beta E + \beta F \ln(A \beta F) - \beta F \ln(1 + \beta F) + \alpha \ln k + \alpha \beta F \ln k$$

Se establece que E es igual a los parámetros que no se encuentran acompañados de la variable k . Siendo F todos aquellos parámetros que acompañan a $\ln k$. Por lo tanto, reagrupando de acuerdo a lo definido anteriormente se obtiene que:

$$F = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta}$$

Reemplazando esta expresión se obtiene:

$$E = \beta E + \ln A - \ln\left(\frac{1}{1 - \alpha\beta}\right) + \frac{\beta\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln A\alpha\beta$$
$$E = \left[\ln A(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha\beta)} \ln A\alpha\beta \right] (1 - \beta)^{-1}$$

Por último, ya con los valores de los coeficientes dados se concluye que:

$$c = Ak^\alpha(1 - \alpha\beta)$$

es la función de política $h(x) = c_t$

Con lo cual

$$c_t = Ak_t^\alpha(1 - \alpha\beta)$$

El capital se moverá de la siguiente manera:

$$\tilde{k} = \alpha\beta Ak^\alpha$$

Entonces, en cada período se tiene que la ecuación de movimiento será la siguiente:

$$k_{t+1} = \alpha\beta Ak_t^\alpha$$

De esta forma, se ha resuelto el problema al haber hallado la función de política que muestra la secuencia de controles que maximiza la función objetivo.

Bibliografía.

- Bellman, Richard. 1957, Dynamic Programming. Princeton University Press
- Ljungqvist Lars, and Sargent, Thomas. 2004, Recursive Macroeconomic Theory Second Edition. MIT Press.
- Stokey, Nancy, and Lucas, Robert Jr. 1989, Recursive Methods in Economics Dynamics. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.