REPASO: TRABAJO PRÁCTICO INICIAL

NOTA A LOS ALUMNOS: Los temas que se incluyen en esta práctica se suponen conocidos por ustedes. Como serán necesarios a lo largo del curso es fundamental que, a modo de repaso, resuelvan estos ejercicios.

Ejercicios de repaso para el primer parcial

1) Calcular los determinantes de las siguientes matrices.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 8 & 2\\ -1 & 9 & 7\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 8 & 2\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

2) Sea la matriz $A\in R^{3x3}$

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

Si $\det(A)=5$, hallar el determinante de las siguientes matrices usando las propiedades del determinante.

a) $B=\begin{pmatrix}d & e & f\\ a & b & c\\ g & h & i\end{pmatrix}$ b) $C=\begin{pmatrix}2a & 2b & 2c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ c) $D=\begin{pmatrix}g & 3h & i\\ d & 3e & f\\ a & 3b & c\end{pmatrix}$

d) $E=\begin{pmatrix}-6a & 2b & 2c\\ -3d & e & f\\ -3g & h & i\end{pmatrix}$ e) $F=\begin{pmatrix}2b & b & c\\ 2e & e & f\\ 2h & h & i\end{pmatrix}$ f) $G=\begin{pmatrix}a & 3c & b\\ d & 3f & e\\ g & 3i & h\end{pmatrix}$

3) Sean A y B matrices en R^{3x3}, tales que $\det(A)=3$ y $\det(B)=-2$. Hallar:

a) $\det(A\cdot B)$ b) $\det(5A)$ c) $\det(A^2)$

d) $\det(A\cdot B^4)$ e) $\det(A^{-1})$ f) $\det(5\cdot B\cdot A^{-1})$

4) Determinar cuales de las matrices del ejercicio 1 son invertibles, y en caso afirmativo hallar la matriz inversa.

5) Decidir cuales de las siguientes matrices son involutivas, idempotentes u ortogonales. Justificar.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6) a) Hallar el producto escalar $A\cdot B$ para los siguientes pares de vectores.

   i) $A=(1,4)$ $\qquad B=(-1,5)$

   ii) $A=(1,0,1)$ $\qquad B=(2,-1,3)$

   b) Hallar los valores de k para que los siguientes pares de vectores resulten ortogonales.

   i) $(1,k,3)$ y $(k,2,0)$

   ii) $(3,-1,k)$ y $(-1,1,k)$

   c) Hallar un vector unitario de R^2 que sea ortogonal a $v=(1,2)$.¿Es único?

7) Determinar los valores de a y b para que la matriz A sea ortogonal. Justifique la respuesta.

$$A=\begin{pmatrix}3/\sqrt{13} & a\\ -2/\sqrt{13} & b\end{pmatrix}.$$

8) Dados los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}x+4y-5z=-8\\ 2x+2y-4z=-4\\ 3x-6y+3z=12\end{cases}$

b) $\begin{cases}2x-y+z=-1\\ -2x+y-z=1\\ 6x-3y+3z=-3\end{cases}$

c) $\begin{cases}-x+y-2z=-1\\ 4x+4y-4z=4\\ 2x-y+2z=3\end{cases}$

d) $\begin{cases}4x-8y+12z=4\\ 2x+y+z=-8\end{cases}$

e) $\begin{cases}-x+2y=-7\\ 5x+5y=-10\\ 6x-3y=15\end{cases}$

f) $\begin{cases}x+3y-2z=7\\ -2x+4y-2z=4\\ -2x-y+z=-3\end{cases}$

i) Escribirlos en forma matricial.

ii) Resolverlos por el método de Gauss. Indicar en cada caso si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

iii) Determinar el rango de la matriz asociada a cada sistema y el rango de la matriz ampliada asociada.

iv) Hallar la solución del sistema homogéneo asociado.

9) Escribir cuando sea posible al vector v como combinación lineal de los vectores del conjunto G.

   a) $v=(-1,3)$ $\qquad G=\{(1,-2);(3,-7)\}$

   b) $v=(-3,-5,1)$ $\qquad G=\{(1,-1,1);(2,2,0);(0,1,3)\}$

c) $v = (3, 7, -6)$ $\qquad G = \{(1,-2,0), (3,,1,0), (-1,-1,0)\}$

10) Decidir en los siguientes casos si el conjunto de vectores G genera al espacio vectorial V.

a) $G = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$ $\qquad V = R^2$

b) $G = \{(1,2,0), (-1,,1,0), (1,1,0)\}$ $\qquad V = R^3$

c) $G = \{(1,0,1), (-1,,1,0), (0,1,0)\}$ $\qquad V = R^3$

d) $G = \{(1, 1, 1), (1,-2, 1), (0, 1, 0), (-1, 1, 2)\}$ $\qquad V = R^3$

e) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad V = R^{2x2}$

11) Decidir cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

a) $\{(-1, 1); (0, -1)\}$

b) $\{(3, 1, 1); (2, -1, 5); (4, 0, -3)\}$

c) $\{(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1), (-1,0,2)\}$

12) Decidir en los siguientes casos si el conjunto de vectores B es una base del espacio vectorial V.

a) $B = \{(1, -1), (2, 3)\}$ $\qquad V = R^2$

b) $B = \{(1, 2,-1), (1,,0, 2), (2, 1, 1)\}$ $\qquad V = R^3$

c) $B = \{(3,-1,0), (-1,,2,0), (1,1,0)\}$ $\qquad V = R^3$

d) $B = \{(1,1,0,0), (-1,1,2,1), (0,1,1,2)\}$ $\qquad V = R^4$

13) Decidir cuáles de los siguientes conjuntos de vectores forman una base ortonormal del espacio vectorial V.

a) $B = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\}$ $\qquad V = R^2$

b) $B = \{(3, -1), (1, 3)\}$ $\qquad V = R^2$

c) $B = \left\{ (1, 0, 0); \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); (0, 0, 1) \right\}$ $\qquad V = R^3$

d) $B = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right); \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right); \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$ $\qquad V = R^3$

14) Dados los siguientes conjuntos:

a) $S = \{x \in R^2 \ / \ 2x_1 + x_2 = 0\}$

b) $S = \{x \in R^2 \ / \ x_1 - 5x_2 = 7 \}$

c) $S = \left\{ \begin{array}{r} x \in R^3 \ / \ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$

d) $S = \langle (1, 1, -1), (2, 3, -1), (3, 1, -5) \rangle$

e) $S = \langle (-2, 1, 0) \ ; (2, 0, 1) \ ; (1, 1, 0) \ ; (0, -1, -1) \rangle$

i) Indique cuáles son subespacios.
ii) Hallar una base y dimensión de los conjuntos que sean subespacio.

15) a) Calcular el diferencial total de $z = x^3 y + x^2 y^2 + xy^2$

b) Hallar $d^2 z$ si $z = e^{-x^2 - y^2}$

16) Indicar si las siguientes funciones son homogéneas y, en caso que lo sean, indicar el grado. Para las funciones que sean homogéneas, verificar el teorema de Euler.

a) $f(x, y) = 3x^2 + 5y - y^2$

b) $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = x^2 \ e^{\frac{3}{y^2}}$

d) $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

17) Dadas las siguientes ecuaciones, verificar la condición de existencia de las derivadas parciales de $z = f(x, y)$ en el punto indicado. Si existen, hallarlas.

a) $\ln(xy) + z - \operatorname{sen} z + 4y = 4$ en $P_0 = (1,1,0)$

b) $e^{xy} - \cos x + 3z^2 - 4z + 1 = 3x$ en $P_0 = (0,3,1)$

18) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones definidas implícitamente si $z = f(x, y)$.

a) $x + y + z = \operatorname{sen}(xyz)$

b) $x + 3y + 2z - \ln z = 0$

c) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = -3$

19) Calcular las derivadas pedidas para cada uno de los siguientes sistemas definidos implícitamente.

a) $\begin{cases} x^3 + 2y^3 - 5z + 1 = 0 \\ x - y + z^3 - 4 = 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} \wedge \dfrac{dz}{dx}$

b) $\begin{cases} x + y - u - v = 0 \\ xu + yv - 1 = 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y} \wedge \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y} \wedge \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$

20) Para los sistemas del ejercicio 14) verificar la condición de existencia de las derivadas parciales en los puntos dados a continuación. En caso que se cumplan y en base a lo calculado en el ejercicio 14), hallar las derivadas en el punto.

a) Para el ejercicio 14) a): $(x_0, y_0, z_0) = \left(-1, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

b) Para el ejercicio 14) b): $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (4,2,3,3)$

c) Para el ejercicio 14) c): $(x_0, y_0) = (2,-1)$ con $u(2,-1) = 2$ y $v(2,-1) = 1$

21) Efectuar las siguientes operaciones y expresar en forma binómica

a) $(-3+4i)+(5-6i)$

b) $(1+i)-2i+(-5-7i)$

c) $(5;\,7)+(3;\,-2)(4;\,-3)$

d) $\dfrac{(2-5i)-(5-2i)}{5-i}$

e) $(1+i^3)(-1-i^5)$

22) Sea $z = 2+3i$ y $w = -1-5i$, hallar

a) $\bar{z}+z$

b) $\overline{z+w}$

c) $z^{-1}+\bar{\bar{w}}$

d) $|z|+|w|$

e) z^2

23) Escribir en forma trigonométrica los siguientes números complejos.

a) $z = 1$

b) $z = 1+i$

c) $z = -1-\sqrt{3}i$

d) $z = 4-4i$

24) Calcular los siguientes complejos utilizando la fórmula de De Moivre.

a) $(1+i)^{20}$

b) $(1-\sqrt{3}\,i)^4$

25) Hallar las raíces indicadas:

a) Las raíces sextas de $z = -8$

b) Las raíces cuadradas de $z = 4+4i$

c) Las raíces cúbicas $z = 1-i$

26) Realizar las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(x^2 + 7x + 12) \quad : \quad (x+3)$

b) $(2x^3 - 5x + 4) \quad : \quad (x-1)$

27) Decidir si los valores de a dados, son raíces de los siguientes polinomios, y en caso afirmativo factorizar los mismos

a) $a = 1$ $\qquad P(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 1$

b) $a = -2$ $\qquad P(x) = x^3 + 2\,x^2 - x - 2$

c) $a = i$ $\qquad P(x) = x^4 - 3\,x^3 + 3\,x^2 - 3\,x + 2$

d) $a = -2\,i$ $\qquad P(x) = x^4 - 2\,x^3$

28) Descomponer los siguientes polinomios como producto de polinomios mónicos de grado 1

a) $P(x) = 3\,x^4 - 6\,x^3 + 3\,x^2 - 24\,x - 36$

b) $Q(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}\,x^2 - 2\,x + 1$

c) $R(x) = x^3 - 2\,x + 4$ sabiendo que $1 + i$ es una de sus raíces

d) $S(x) = x^4 + 6\,x^3 - 5\,x^2 - 42\,x + 40$

Ejercicios de repaso para el segundo parcial

29) Resolver las siguientes integrales utilizando el método de sustitución.

a) $\int e^{-x^2}\; x\, dx$

b) $\int \sec^2(2ax)\, dx$

c) $\int \dfrac{\ln x}{x}\, dx$

d) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}}\, dx$

e) $\int x\,\sqrt{x+1}\, dx$

f) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\, dx$

g) $\int \dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$

h) $\int \dfrac{e^p}{(e^p - 1)^2}\, dp$

i) $\int \dfrac{x}{\sqrt[4]{5 - 2x^2}}\, dx$

j) $\int \cos^3 x \;\text{sen}\, x\, dx$

30) Resolver por el método por partes las siguientes integrales.

a) $\int \ln 2x\, dx$

b) $\int e^x x^2\, dx$

c) $\int e^{-x}\;\text{sen}\, x\, dx$

d) $\int x\; \text{arctg}\, x\, dx$

31) Resolver las integrales siguientes por el método de fracciones simples.

a) $\int \frac{x+3}{x-x^3}\,dx$

b) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

c) $\int \frac{x+1}{(x-1)^3}\,dx$

d) $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$

e) $\int \frac{3}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$

f) $\int \frac{x^4+x+2}{2x^3+x^4}\,dx$

32) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

a) $x\,dy + y\,dx = \operatorname{sen} x\,dx$

b) $\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \left(\frac{1}{y}+\operatorname{tg} x\right)dy = 0$

c) $\left(x\operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right)+y\right)dx - x dy = 0$

d) $(1+x^2)\,y' + x\,y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

33) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

a) $y'' + y = 2x+3$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 5e^x$

c) $y'' - 4y = 2e^x + 3x$

d) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 3\cos x$

e) $y'' - 4y = -e^{2x} + sen(2x)$

f) $y'' + y' = 4x-1$

34) Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas

a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2x+1$ $\quad y(0)=1/3\ ;\ y'(0) = -4/9$

b) $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$ $\quad y(0)=4\ ;\ \ y'(0)=3$

RESPUESTAS

1) $\det(A) = -16$ $\det(B) = 0$ $\det(C) = 18$ $\det(D) = -12$ $\det(E) = -70$

2)
a) – 5 d) – 30
b) 10 e) 0
c) – 15 f) – 15

3)
a) – 6 d) 48
b) 375 e) $\frac{1}{3}$
c) 9 f) $-\frac{250}{3}$

4)
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 1/8 & 1/16 \end{pmatrix}$$

B no tiene inversa pues $\det(C) = 0$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & 1/9 \\ 1/3 & 8/9 & 1/9 \\ -1/6 & -1/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 & -13/3 \\ 0 & 1/2 & 7/4 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

5) A es idempotente
B es involutiva
C es involutiva y ortogonal

6)
a) i) 19 ii) 5
b) i) $k = 0$ ii) $k = 2$ o $k = -2$
c) Hay dos vectores solución: $v_1 = \left(-2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5\right) \wedge v_2 = \left(2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/5\right)$

7) Hay dos vectores solución: $v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}} \right) \quad \wedge \quad v_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}; -\frac{3}{\sqrt{13}} \right)$

8)

i)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

ii)

a) Compatible indeterminado (C.I.)
Dado que no hay una única manera de despejar las variables, la respuesta dada es orientativa. Otras formas de expresar la solución podrían ser correctas.

$z = y + 2$

$x = y + 2$

$y \in R$

Otra forma de expresar la solución es:

$$X = (y+2, y, y+2) = (y, y, y) + (2,0,2) \quad y \in R$$

b) Compatible indeterminado.(C.I.)
Dado que no hay una única manera de despejar las variables, la respuesta dada es orientativa. Otras formas de expresar la solución podrían ser correctas.

$z = -2x + y - 1 \quad x, y \in R$

Otra forma de expresar la solución es:

$$X = (x, y, -2x + y - 1) = (x, y, -2x + y) + (0,0,-1) \quad x, y \in R$$

c) $\begin{array}{l} x=2 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{array}$ Compatible determinado

d) Compatible indeterminado.(C.I.)

Dado que no hay una única manera de despejar las variables, la respuesta dada es orientativa. Otras formas de expresar la solución podrían ser correctas.

$x=-y-5$

$z=y+2$

$y \in R$

Otra forma de expresar la solución es:

$$X=(-y-5,y,y+2)=(-y,y,y)+(-5,0,2) \quad y \in R$$

e) $\begin{array}{l} x=1 \\ y=-3 \end{array}$ Compatible determinado (C.D)

f) Incompatible (I)

iii)

a) $rg(A)=rg(A \vdots b)=2<3 \quad \Rightarrow$ C.I.

b) $rg(A)=rg(A \vdots b)=1<3 \quad \Rightarrow$ C.I.

c) $rg(A)=3 \quad \Rightarrow$ C.D

d) $rg(A)=rg(A \vdots b)=2<3 \quad \Rightarrow$ C.I

e) $rg(A)=rg(A \vdots b)=2 \quad \Rightarrow$ C.D

f) $rg(A)=2 \neq rg(A \vdots b)=3 \quad \Rightarrow$ I

iv)

a) Compatible indeterminado (C.I.)

Dado que no hay una única manera de despejar las variables, la respuesta dada es orientativa. Otras formas de expresar la solución podrían ser correctas.

$$X=(y,y,y) \quad y \in R$$

b) Compatible indeterminado.(C.I.)

Dado que no hay una única manera de despejar las variables, la respuesta dada es orientativa. Otras formas de expresar la solución podrían ser correctas.

$$X=(x,y,-2x+y) \quad x,y \in R$$

c) $\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$ Compatible determinado

d) Dado que no hay una única manera de despejar las variables, la respuesta dada es orientativa. Otras formas de expresar la solución podrían ser correctas.

$$X=(-y,y,y) \quad y \in R$$

e) $\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}$ Compatible determinado (C.D)

f) Compatible indeterminado.(C.I.)

$$X=(\frac{1}{3}y,y,\frac{5}{3}y) \quad y \in R$$

9)

a) $(-1,3) = 2 \cdot (1,-2) + (-1) \cdot (3,-7)$

b) $(-3,-5,1) = 1 \cdot (1,-1,1) + (-2) \cdot (2,2,0) + 0 \cdot (0,1,3)$

c) No es posible.

10)

a) Genera R^2

b) No genera R^3

c) Genera R^3

d) Genera R^3

e) No genera R^{2x2}

11)

a) Sí son LI

b) Sí son LI

c) No son LI

12)

a) Sí

b) Sí

c) No

d) No

13)

a) Sí

b) No

c) No

d) Sí

14)

a) Es subespacio. $B = \{(1,-2)\} \Rightarrow \dim S = 1$

b) No es subespacio

c) Es subespacio. $B = \{(1,0,-1)\} \Rightarrow \dim S = 1$

d) El subespacio generado es $S = \{(x,y,z) \in R^3 \ / \ 2x - y + z = 0\}$

$B = \{(1,2,0);(0,1,1)\} \Rightarrow \dim S = 2$

e) $B = \{(1,1,0);(0,-1,-1);(2,0,1)\} \Rightarrow \dim S = 3 \Rightarrow S = R^3$

15)

a) $dz = (3x^2 y + 2xy^2 + y^2)\,dx + (x^3 + 2x^2 y + 2xy)\,dy$

b) $d^2 z = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2-y^2}dx^2 + 4xye^{-x^2-y^2}dxdy + 2(2y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}dy^2$

16)

a) No homogénea

b) Homogénea con $n = 1$

c) No homogénea
d) Homogénea con $n = 0$

17)
a) $F'_Z(1;1;0) = 0$ por lo tanto no existen las derivadas parciales z'_x y z'_y
b) $z'_x(0;3;1) = z'_y(0;3;1) = 0$

18)
a) $z'_x = \dfrac{yz\cos(xyz) - 1}{-xy\cos(xyz)}$; $z'_y = \dfrac{xz\cos(xyz) - 1}{1 - xy\cos(xyz)}$
b) $z'_x = \dfrac{-z}{2z - 1}$; $z'_y = \dfrac{-3z}{2z - 1}$
c) $z'_x = \dfrac{yz - x^2}{z^2 - xy}$; $z'_y = -\dfrac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy}$

19)
a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{9x^2z^2 + 5}{18y^2z^2 - 5} \quad \wedge \quad \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{6y^2 + 3x^2}{18y^2z^2 - 5}$

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y + u}{y - x} \quad \wedge \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y + v}{y - x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{x + u}{x - y} \quad \wedge \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x + v}{x - y} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-24xv^2 + 4yv}{8uv - 36u^2v^2} \quad \wedge \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{24yv^2 + 2v(2x + 2y)}{8uv - 36u^2v^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{6yu^2 - 8ux}{8uv - 36u^2v^2} \quad \wedge \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{8yu + 3u^2(2x + 2y)}{8uv - 36u^2v^2} \end{cases}$

20)
a) $\Delta = 0$ en este punto por lo tanto no existen las derivadas parciales en un entorno del punto dado.
b) $F_2(4,2,3,3) \neq 0$ por lo tanto no existen las derivadas parciales en un entorno del punto dado.
c) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{13}{32} \quad \wedge \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{5}{32} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{14}{32} \quad \wedge \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{16} \end{cases}$

21)

a) $z = 2 - 2i$

b) $z = -4 - 8i$

c) $z = 11 - 10i$

d) $z = -\frac{6}{13} - \frac{9}{13}i$

e) $z = -2$

22)

a) $\frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$

b) $-\frac{11}{13} - \frac{68}{13}i$

c) $\sqrt{13} + \sqrt{6}$

d) $-5 + 12i$

23)

a) $z = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = e^0$

b) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = 2\ e^{i\frac{4\pi}{3}}$

d) $z = \sqrt{32}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{32}\ e^{i\frac{7\pi}{4}}$

24)

a) $\left(\sqrt{2}\right)^{20}\ [\cos(5\pi) + i \operatorname{sen}(5\pi)] = -1024$

b) $2^4\left[\cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{20\pi}{3}\right)\right] = -8 + 8\sqrt{3}\,i$

25)

a) $w_k = \sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) \qquad 0 \le k \le 5$

b) $w_k = 2\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2}\right) \qquad 0 \le k \le 1$

c) $w_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) \qquad 0 \le k \le 2$

26)

a) $C(x) = x+4 \qquad R(x) = 0$

b) $C(x) = 2x^2 + 2x - 3 \qquad R(x) = 1$

27)

a) $a=1$ es raíz y $P(x) = 2\,(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

b) $a=-2$ es raíz y $P(x) = 3\,(x+2)\,(x-1)\,(x+1)$

c) $a=-i$ es raíz y $P(x) = (x-2)\,(x-1)\,(x-i)\,(x+i)$

d) $a=-2i$ no es raíz de $P(x)$

28)

a) $P(x) = 3\,(x-2i)\,(x+2i)\,(x+1)\,(x-3)$

b) $Q(x) = 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+\sqrt{2})\,(x-\sqrt{2})$

c) $R(x) = [x-(1+i)]\,[x-(1-i)]\,(x+2)$

d) $S(x) = (x-1)\,(x-2)\,(x+5)\,(x+4)$

29)

a) $-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}+k$

b) $\dfrac{1}{2a}\,\text{tg}\,2ax + k$

c) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + k$

d) $2(e^{\sqrt{x}}+\sqrt{x})+k$

e) $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + k$

f) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\ln^4 x} + k$

g) $-2\sqrt{\cos x} + k$

h) $\dfrac{-1}{e^p - 1} + k$

i) $-\dfrac{1}{4}(5-2x^2)^{\frac{3}{4}} + k$

j) $-\dfrac{\cos^4 x}{4} + k$

30)

a) $x\ln|2x| - x + k$

b) $e^x(x^2-2x+2)+k$

c) $-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \text{sen}\,x) + k$

d) $\dfrac{1}{2}\,\text{arctg}\,x\,(x^2+1) - \dfrac{1}{2}x + k$

31)

a) $\ln\left|\dfrac{x^3}{(1+x)(1-x)^2}\right| + k$

b) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\dfrac{x^2\ (x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+k$

c) $-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+k$

d) $\dfrac{1}{4}\ln|x-1|-\dfrac{1}{4}\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x+k$

e) $-\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^6+k$

f) $x-\dfrac{1}{2x^2}-2\ln|x+20|+k$

32)

a) $y = x^{-1}\ (-\cos x + C)$

b) $\ln x + y\ \operatorname{tg} x + \ln y = C$

c) $x = C\ \cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ (\operatorname{arctg} x + C)$

33)

a) $y = C_1 \cos x + C_2\ senx + 2x + 3$

b) $y = C_1 \cos x + C_2\ senx + 5/2\ e^x$

c) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2/3\ e^x - 3/4\ x$

d) $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2\ sen2x) + 3/5 \cos x - 3/10\ senx$

e) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 1/4x\ e^{2x} - 1/8\ sen2x$

f) $y = C_1 + C_2 e^x + 2x^2 - 5x$

34)

a) $y = 1/9(e^{3x} + e^{-x} - 6x + 1)$

b) $y = e^{3x} \cos 2x + 3$